

أهدى إلى مسم الرصاصات

٢٠٠٦ / ١١ / ٢٨

المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته

تأليف
إيروين كريزيك
Erwin Kreyszig

ترجمته
الدكتور خضر حامد الأحمد
أستاذ في كلية العلوم - جامعة دمشق

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

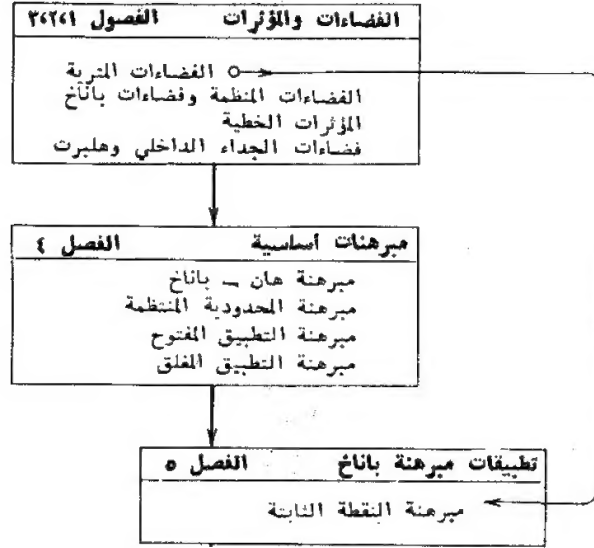
نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين . ورغم حداثة سنه نسبيا ، إلا أنه يشغل حاليا مركزا متميزا بين العلوم الرياضية المعاصرة ، كما وأن تطبيقاته تغطي رقعة واسعة من ساحتها . وليس من قبيل المبالغة القول بأن التحليل الدالي أحدث انعطافا في الفكر الرياضي ، شبيها بذلك الذي خلقه ادخال المتغيرات في علم الرياضيات في القرن السابع عشر ، والذي أدى الى نشوء الحساب التفاضلي والتكاملي . وبعد صدور كتاب الرياضي البولوني الكبير باناخ «Théorie des opérations linéaires» عام ١٩٣٢ ، أخذت أفكار ولغة التحليل الدالي طريقها الى العديد من فروع العلوم الرياضية وتطبيقاتها ، حتى ليكاد يتعذر الفصل أحيانا بين التحليل الدالي والمواضيع التي يطبق فيها .

ومفهوم « المؤثر » يشغل مركز الصدارة في التحليل الدالي ،

وهو تعميم لمفهوم الدالة التي لولها لما كان للتحليل الرياضي أن يكون . ودراسة النظرية العامة للتأثيرات تكمن في صلب التحليل الدالي . وفي حين يُعنى التحليل الرياضي بدراسة مجموعة منتهية من الدوال والعلاقات التي تربط بينها ، فإن التحليل الدالي يستعيز عن هذا بدراسة فضاءات الدوال والعمليات عليها . فالمؤثر التفاضلي مثلا لا يتناول كل دالة على حدة أو مجموعة منتهية من الدوال ، كما هو الحال في التحليل الرياضي التقليدي ، بل يتناول صفا كاملا من الدوال ، ويدرس فضاء الدوال الحاصل نتيجة إعمال هذا المؤثر . كذلك فقد لاحظ بعض علماء الرياضيات في باكورة هذا القرن ، وفي مقدمتهم باناخ Banach ورييس Riesz أن معالجة بعض المسائل المختلفة في الرياضيات التقليدية من وجهة نظر أكثر عمومية وأشد تجريدا تمكننا من التوصل الى دراسة موحدة للعديد من هذه المسائل التي تبدو للوهلة الاولى وكأنها بعيدة كل البعد احداها عن الاخرى . فدراسة المعادلة $y = f(x)$ مثلا تسمح بتوحيد معالجة مسائل كانت تُبحث كل منها على حدة في نطاق أنظمة رياضية مختلفة . وبصورة أدق تحديدا ، فإن هذه المعالجة للمعادلة السابقة أدت الى حل مسائل الوجود للمعادلات التفاضلية ، والمعادلات التكاملية والمعادلات الجبرية .

يهدف هذا الكتاب الى تعريف القارئ على المفاهيم والطرائق الأساسية المعتمدة في التحليل الدالي ؛ وهو ابتدائي في مضمونه إذ أن قراءته لا تتطلب سوى معرفة مبادئ الجبر الخطي والتحليل الرياضي . هذا وان محتوى الكتاب يتناول ترجمة لخمس فقط من فصول الكتاب الاحد عشر ، وهو يعطي مفردات مقرر التحليل (التابعي) الذي يدرس في الصف الرابع لطلاب قسم الرياضيات في جامعة دمشق بمعدل أربع ساعات معتمدة أسبوعيا .

ويبين المخطط التالي الترتيب الذي أورده المؤلف للمواضيع التي
يحتويها هذا الكتاب .



لدى النظر الى هذا المخطط نرى أن المؤلف أورد نظرية فضاءات باناخ (في الفصل الثالث) قبل ايراد المبرهنات الاساسية حول الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ (في الفصل الرابع) . ويرى المؤلف أن السبب في هذا يعود الى أن هذه الفضاءات أبسط ، ولانها تساهم في رفد الفصل الرابع بأمثلة اضافية ، وأهم من هذا وذلك ، لانها تعطي الطالب احساسا أفضل بالصعوبات التي يجابهها لدى انتقاله من فضاءات هلبرت الى فضاءات باناخ العامة .

ان المترجم يدرك تماما العقبات التي تقف في سبيل القارئ العربي لدى دراسته لكتاب في الرياضيات معرب أو مؤلف في بلد

عربي آخر . واني لا أرى وسيلة لتذليل هذه العقبات سوى التقيد
قدر الامكان بالمصطلحات التي أقرها المكتب الدائم لتنسيق
التعريب التابع للجامعة العربية ، وإيراد ثبت للمصطلحات العربية
المعتدة في الكتاب مرتبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل
منها باللغة الانجليزية . وفي هذا الصدد ، فقد أفدت كثيرا من
المعجمين التاليين :

١ - معجم الرياضيات المعاصرة ، للدكاترة : صلاح أحمد
وموفق دعبول والهام حمصي (مؤسسة الرسالة ١٩٨٣ م) .

٢ - معجم الرياضيات للدكاترة فوزي دنان وسعيد باقر
وصابر العايدي وهاني فران (مؤسسة الكويت للتقدم العلمي
١٩٨٣ م) .

ان ترجمتي هذه لجزء من كتاب بلغة أجنبية هو جهد متواضع
لإضافة مرجع جديد لطلابنا العرب في موضوع تعتبر أي ثقافة رياضية
خالية منه فاقدة لركن أساسي فيها . وآمل أن لا يضمن القراء الاعزاء
بتنبيهي الى الاخطاء الواردة في الكتاب (والتي هي بالطبع من صنع
المترجم وليس للمؤلف دخل فيها) كي يصار الى تصحيحها في طبعة
قادمة بإذن الله ، ولهم مني سلفا كل شكر وامتنان .

دمشق في ١ آذار ١٩٨٥

المترجم

الفصل الأول

الفضاءات المترية

يمثل التحليل الدالي أحد الفروع المجردة من علم الرياضيات والمنبثقة عن التحليل الرياضي التقليدي . وقد بدأ هذا الفرع بالتطور منذ قرابة ثمانين عاما ، كما أن طرائقه ونتائجه هي اليوم على درجة كبيرة من الاهمية في الحقول المختلفة للعلوم الرياضية وتطبيقاتها . وقد كان الدافع لنشوء التحليل الدالي كل من الجبر الخطي ، والمعادلات التفاضلية الخطية العادية والجزئية ، وحساب التغيرات ، ونظرية التقريب ، وبوجه خاص نظرية المعادلات التكاملية الخطية التي كان لها أكبر الاثر في تطوير الافكار المعاصرة . وقد لاحظ الرياضيون أنه غالبا ما يكون للمسائل المنسوبة الى حقول مختلفة من علم الرياضيات مظاهر وخواص مرتبطة فيما بينها . وقد استغلت هذه الحقيقة بهدف التوحيد الفعال لمعالجة مثل هذه المسائل ، وقد تم هذا التوحيد بأن حذفت التفاصيل غير الاساسية . لذا فان الفائدة التي تجنى من هذه المعالجة المجردة تكمن في أنها تركز على الحقائق الاساسية ، التي تغدو مرئية بوضوح ، لكون انتباه الباحث غير مشتت في خِصَم التفاصيل غير الهامة .

وفي هذا الصدد ، فان الاسلوب المجرد هو أبسط الاساليب وأكثرها اقتصادا لدى معالجة الانظمة الرياضية . وبما أنه يوجد لكل نظام مجرد في الحالة العامة تجسيدات محددة مختلفة (تسمى نماذج) ، فاننا نرى أن الاسلوب المجرد متعدد الاستعمالات لدى تطبيقه على حالات محددة . وهو يساعد في

تحرير المسألة من عزلتها ، كما وأنه يوجد علاقات بين حقول لم يكن في السابق أي صلات فيما بينها •

وفي المعالجة المجردة ، فانا نطلق عادة من مجموعة من العناصر تحقق مسلمات معينة • أما طبيعة العناصر فتترك دون تحديد ، وهذا أمر تفعله عن قصد • وعندئذ تتألف النظرية من نتائج منطقية تسمى مبرهنات نستخلصها من المسلمات • ويعني هذا أنه في سياق هذه المعالجة انطلاقا من المسلمات ، فانا نحصل على بنية رياضية ، نجد نظريتها بطريقة مجردة • وهذه المبرهنات العامة يمكن أن تطبق بعدئذ على مجموعات خاصة متنوعة تحقق المسلمات •

وعلى سبيل المثال ، ففي الجبر تستعمل هذه المعالجة في الحقول والحلقات والزمير • وفي التحليل الدالي ، فانا نستعملها في سياق الفضاءات المجردة • وهذه الفضاءات على غاية من الاهمية ، وسندرس بعضا منها بكثير من التفصيل (فضاءات باناخ وفضاءات هيلبرت) • وسنرى أن مفهوم الفضاء هنا يستعمل بمعنى واسع جدا بصورة مدهشة • فالفضاء المجرد هو مجموعة عناصر (ذات طبيعة كيفية) تحقق مسلمات معينة • وباختيارنا جملا مختلفة من المسلمات ، فانا نجد أنماطا مختلفة من الفضاءات المجردة •

ان فكرة استعمال فضاءات مجردة بصورة منهجية يعزى الى م • فريشيه (١٩٠٦ م) ، وهذا مبرر بالنجاح الكبير الذي حققته هذه الفضاءات •

سندرس في هذا الفصل الفضاءات المترية ، وهذه الفضاءات أساسية في التحليل الدالي لكونها تلعب دورا مماثلا لذلك الذي يلعبه المحور الحقيقي R في الحساب التفاضلي والتكاملي • وفي الحقيقة ، فإن هذه الفضاءات تعميم لـ R ، وقد ابتدعت لتشكيل قاعدة لمعالجة موحدة لمسائل هامة تنتمي الى فروع مختلفة من التحليل •

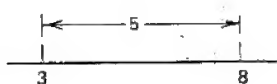
سنعرف أولا الفضاءات المترية ومفاهيم متعلقة بها ، كما وسنوضحها بأمثلة نموذجية • وسنناقش الفضاءات الخاصة ذات الاهمية العملية بصورة مفصلة • وسنولي كثيرا من الاهتمام لمفهوم التمام ، وهو خاصة قد يكون الفضاء المترى متمما بها ، وقد لا يكون • ويلعب التمام دورا أساسيا في كتابنا هذا كله •

مفاهيم هامة • توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

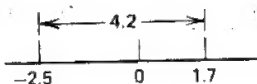
الفضاء المترى (راجع ١-١-١) هو مجموعة X مزودة بمتري • ويقرن المترى بكل زوج من العناصر (النقاط) من X مسافة • ويعرف المترى بالمسلمات التي تحدده ، وقد اقترحت هذه المسلمات استنادا الى خواص بسيطة محددة للمسافة المألوفة بين نقاط المحور الحقيقي R والمستوي العقدي C • وتبين الامثلة الاساسية (كالمثالين ٢-١-١ و ٣-١-١) أن مفهوم الفضاء المترى هو عام بصورة ملفقة للنظر • ومن الخواص الاضافية ذات الاهمية البالغة التي يمكن أن يتسم بها الفضاء المترى ، خاصة التمام (راجع ٣-٤-١) التي سندرسها باسهاب في الفصلين ٥-١ و ٦-١ • وثمة مفهوم آخر ذو أهمية نظرية وعملية ، هو مفهوم **فصولية** الفضاء المترى (راجع ٥-٣-١) • والفضاءات المترية الفصولية أبسط من الفضاءات غير الفصولية •

١-١ الفضاء المترى

ندرس في الحساب التفاضلي والتكاملي الدوال المعرفة على المحور الحقيقي R • ولا يحتاج المرء للكثير من الجهد كي يرى في عمليات الانتقال الى النهاية وفي كثير من الاعتبارات الاخرى ، اننا نستعمل حقيقة وجود دالة مسافة على R ، ولنرمز لها بـ d ، بحيث يقابل كل زوج من النقاط x, y من R وفق هذه الدالة المسافة $d(x, y) = |x - y|$ • ويوضح الشكل (٢) هذا الرمز • هذا ونجد وضعاً مماثلاً في المستوى وفي الفضاء « ثلاثي البعد » المألوف •



$$d(3, 8) = |3 - 8| = 5$$



$$d(1.7, -2.5) = |1.7 - (-2.5)| = 4.2$$

الشكل (٢) • المسافة على R

أما في التحليل الدالي ، فاننا ندرس « فضاءات » أعم و « دوال » معرفة على هذه الفضاءات • وتتوصل الى مفهوم عام ومرن بدرجة كافية لمفهوم « الفضاء »

على النحو التالي : نستعيز عن مجموعة الاعداد الحقيقية R بمجموعة مجردة X (وهي مجموعة عناصر ذات طبيعة غير محددة) ونحدد على X « دالة مسافة » تتمتع بقدر ضئيل من الخواص الاساسية جدا لدالة المسافة على R . ولكن ما الذي نعنيه بعبارة « الاساسية جدا » ؟ ان هذا السؤال بعيد عن أن يكون سؤالاً تافهاً ، ذلك أن اختيار وصياغة المسلمات لدى ايراد تعريف ما أمر يحتاج دوماً الى خبرة وإتقان مع المسائل العملية وفكرة واضحة عن الهدف الذي نسمى اليه . وفي حالتنا هذه ، فانه انقضى أكثر من ستين سنة قبل التوصل الى المفهوم التالي الذي يعتبر أساسياً وبالغ الأهمية في التحليل الدالي وتطبيقاته .

١-١-١ تعريف (الفضاء المترى ، المتركة)

الفضاء المترى هو زوج (X, d) ، حيث X مجموعة و d متركة على X (أو دالة مسافة على X) ، أي دالة معرفة* على $X \times X$ بحيث تحقق الخواص التالية أيا كان x, y, z من X :

$$(١م) \quad d \text{ دالة حقيقية وغير سالبة} .$$

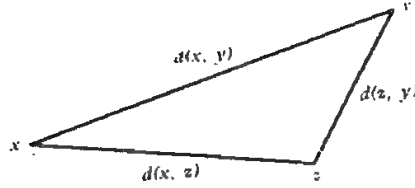
$$(٢م) \quad \text{الشرط اللازم والكافي كي يكون } d(x, y) = 0 \text{ هو أن يكون } x = y$$

$$(٣م) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{التناظر})$$

$$(٤م) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{متباينة المثلث})$$

سنورد فيما يلي بعض المصطلحات . تسمى X عادة مجموعة الرديف للزوج (X, d) ، كما تدعى عناصرها نقاطاً . ولدى تثبيت x, y ، فالتنا نسمي العدد غير السالب $d(x, y)$ المسافة من x الى y . وتشكل الخواص بدءاً من (١م) حتى (٤م) موضوعات المتركة . واسم «متباينة المثلث» الذي أطلقناه على الموضوع (٤م) مأخوذ من الهندسة الابتدائية كما هو مبين في الشكل (٣) .

(*) يشير الرمز \times الى الجداء الديكارتي لمجموعتين حيث $A \times B$ هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (a, b) ، حيث $a \in A$ و $b \in B$. لذا فان $X \times X$ هو مجموعة كل الأزواج المرتبة من عناصر X .



الشكل (٢) • متباينة المثلث في المستوي

وباستعمال الاستقراء الرياضي ، فاننا نستنتج من الموضوعه (٤م) متباينة المثلث المعممة التالية :

$$(1) \quad d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

وبدلا من كتابة (X, d) يمكن أن نكتفي بكتابة X اذا لم يكن ثمة مجال للالتباس •

ونحصل على فضاء جزئي (Y, \bar{d}) من الفضاء (X, d) اذا أخذنا مجموعة جزئية Y من X ، وقصرنا d على $Y \times Y$ • وهكذا ، فان المترك على Y هو المقصور

$$\bar{d} = d|_{Y \times Y}$$

ويسمى \bar{d} المترك المنحدث على Y بالمترك d (أو المستخلص من المترك d)

سنورد الآن أمثلة على الفضاءات المترية ، بعضها مألوف لدى القارئ • ولايات أن هذه فضاءات مترية ، فمن الواجب التحقق في كل حالة من صحة الموضوعات (١م) حتى (٤م) • وفي الأحوال العادية ، فان التحقق من صحة (٤م) يتطلب جهدا أكبر مما يلزم للموضوعات (١م) حتى (٣م) • بيد أن هذا لن يكون معقدا في الأمثلة التي سنوردها ، الامر الذي يسمح لنا بترك مسألة التحقق للقارئ • أما الفضاءات المترية المعقدة التي يكون التحقق فيها من صحة (٤م) ليس بالامر السهل ، فاننا سنوردها في الفصل القادم •

أمثلة

٢-١-١ المحور الحقيقي

وهو مجموعة الأعداد الحقيقية المزودة بالترك المعتاد المحدد بالمساواة

$$(2) \quad d(x, y) = |x - y|.$$

٢-١-١ المستوى الإقليدي \mathbb{R}^2

نحصل على انفضاء المترى \mathbb{R}^2 ، الذي يسمى بالمستوى الإقليدي ، إذا أخذنا مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية ، مثل * $x = (\xi_1, \xi_2)$ و $y = (\eta_1, \eta_2)$ ، الخ ، وأخذنا الترك الإقليدي المعروف بالمساواة

$$(3) \quad d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \quad (\geq 0)$$

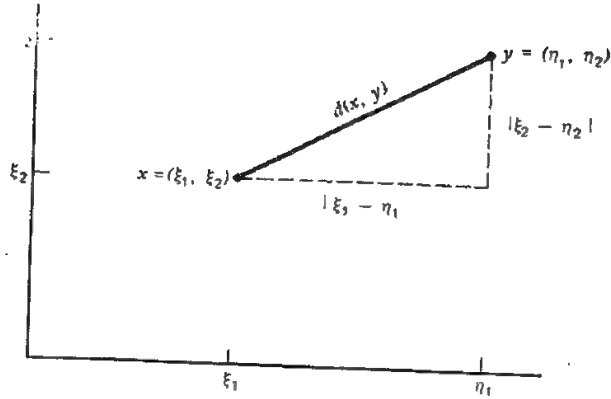
انظر الشكل (٤) •

ونحصل على فضاء مترى آخر إذا أخذنا المجموعة نفسها كما سبق ، إلا أننا سنختار متراكا آخر d_1 معرفا بالدستور

$$(4) \quad d_1(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|.$$

ان هذا يوضح حقيقة هامة ، وهي أنه يمكننا أن نحصل من مجموعة معطاة (تحتوي أكثر من عنصر واحد) على فضاءات مترية مختلفة ، وذلك باختيار متراك مختلفة • (لا يوجد للفضاء المترى حيث الترك هو d_1 اسم متفق عليه • ويطلق على d_1 أحيانا اسم متراك سيارة الاجرة • لماذا ؟ ويرمز أحيانا الى \mathbb{R}^2 بالشكل (E^2) •

(*) لم نكتب $x = (x_1, x_2)$ ، ذلك أن x_1, x_2 ستلزمنا في المستقبل (بدءا من البند ١-٤) عند دراستنا للمتتاليات •



الشكل (٤) . المتك الإقليدي على المستوي

٤-١-١ الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3

يتألف هذا الفضاء المتري من مجموعة الثلاثيات المرتبة من الأعداد الحقيقية $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ الخ ، المزودة بالمتك الإقليدي المعروف كالتالي :

$$(5) \quad d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2} \quad (\geq 0)$$

٥-١-١ الفضاء الإقليدي R^n ، الفضاء الوحدوي C^n ، المستوي العقدي C

ان الأمثلة السابقة ليست سوى حالات خاصة من الفضاء الإقليدي R^n ذي الأبعاد n . ونجد هذا الفضاء اذا أخذنا مجموعة كل المتجهات n من الأعداد الحقيقية ، والتي نكتبها بالشكل

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

... الخ ، والمزودة بالمتك الإقليدي المعروف بالدستور

$$(6) \quad d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2} \quad (\geq 0)$$

ويعرف الفضاء الوحدوي "C ذو البعد n بأنه فضاء كل المراتب n من الاعداد العقدية المزودة بالترك التالي :

$$(7) \quad d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2} \quad (\geq 0)$$

وعندما $n=1$ ، فإن هذا الفضاء يعدو المستوي العقدي C المزود بالترك المعتاد المعروف بالمساواة

$$(8) \quad d(x, y) = |x - y|$$

(يسمى "C أحيانا بالفضاء الاقليدي العقدي ذي البعد n) .

١-١-٣ فضاء المتتاليات

ان هذا المثال والذي يليه يعطيان انطباعا أولا عن مدى العمومية التي ينطوي عليها مفهوم الفضاء المترى . سنأخذ X على أنها مجموعة كل المتتاليات المحدودة من الاعداد العقدية ، أي أن كل عنصر من X هو متتالية عقدية

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$$

أو اختصارا

$$x = (\xi_j)$$

بحيث أنه أيا كان $j = 1, 2, \dots$ ، فإن

$$|\xi_j| \leq c_x$$

بافتراض c_x عددا حقيقيا قد يتبع x ، الا أنه لا يتبع r . سنختار المترى محددًا بالمساواة

$$(9) \quad d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|$$

حيث $y = (\eta_i) \in X$ ، $N = \{1, 2, \dots\}$ ، وحيث يرمز \sup الى الحد الاعلى . ويرمز للفضاء المتري الذي نجده وفق الفروض السابقة بالشكل I^∞ . (سيبرر هذا الرمز الغريب الى حد ما في البند ١-٢-٣ من الفصل التالي) . ان I^∞ هو فضاء متتاليات ، ذلك ان كل عنصر من X (أي أن كل نقطة في X) متتالية .

٧-١-١ فضاء الدوال $C[a, b]$

نأخذ X هنا مجموعة كل الدوال الحقيقية x, y ، التي هي دوال لمتغير حقيقي مستقل t ، وهي معرفة ومستمرة على مجال مغلوق معطى $J = [a, b]$. وباختيار المتري وفق المساواة

$$(10) \quad d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|,$$

حيث \max تشير الى القيمة العظمى ، فاننا نجد فضاء متريا نرمز له بـ $C[a, b]$. (الحرف C يمثل الحرف الاول من الكلمة الانجليزية "continuous" ، التي تعني « مستمر ») . ان هذا هو فضاء دوال لان كل نقطة من $C[a, b]$ هي دالة . على القارئ أن يدرك الفرق الشاسع بين الحساب التفاضلي والتكاملي ، حيث ندرس دالة واحدة أو عددا قليلا من الدوال في آن واحد ، وبين التحليل الدالي حيث تغدو الدالة مجرد نقطة في فضاء واسع .

٨-١-١ الفضاء المتري المتقطع

لنأخذ أي مجموعة X ، ولتزودها بما يسمى المتري المتقطع المعروف كما يلي :

$$d(x, x) = 0, \quad d(x, y) = 1 \quad (x \neq y)$$

يسمى هذا الفضاء (X, d) الفضاء المتري المتقطع . ورغم أنه نادرا ما يرد في التطبيقات ، الا أننا سنستعمله في الامثلة بغية ايضاح بعض المفاهيم .

لدى النظر الى ١-١-١ ، فأننا نرى أن الفضاء المترى يعرف استنادا الى موضوعات ، ونريد أن نذكر بأن التعاريف بالموضوعات تستعمل اليوم في العديد من فروع علم الرياضيات . وقد تم الاعتراف بفائدتها عموما بعد أن نشر هلمبرت بحثه حول أسس الهندسة ، ومن المهم ملاحظة أنه كان لدراسة الهندسة التي هي أحد اقدم وأبسط أقسام العلوم الرياضية أكبر وأهم الاثر في الرياضيات المعاصرة .

مسائل

- ١ - أثبت أن المحاور الحقيقي هو فضاء مترى .
- ٢ - هل تحدد المساواة $d(x, y) = (x - y)^2$ متركا على مجموعة الاعداد الحقيقية ؟
- ٣ - بين أن $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ تحدد متركا على مجموعة الاعداد الحقيقية .
- ٤ - أوجد كل المتارك على مجموعة X مؤلفة من نقطتين ، وعلى مجموعة وحيدة العنصر .
- ٥ - ليكن d متركا على X . حدد كل الثوابت k بحيث يكون (i) kd (ii) $d + k$ متركا على X .
- ٦ - بين أن d في ١-١-٦ يحقق متباينة المثلث .
- ٧ - اذا كان A فضاء جزئيا من \mathbb{R}^n مؤلفا من كل المتتاليات التي كل حد فيها اما ٠ واما 1 ، فما هو المتراك المحدث على A ؟
- ٨ - بين أنه يمكن تعريف متراك آخر \bar{d} على المجموعة X في ١-١-٧ بالمساواة

$$\bar{d}(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt.$$

- ٩ - أثبت أن d الوارد في ١-١-٨ هو متراك .
- ١٠ - (مسافة هامنغ) لتكن X مجموعة كل الثلاثيات المرتبة من الاصفار والواحدات . بين أن X تتألف من ثمانية عناصر ، وأنه يمكن تحديد متراك

d على x بالمساواة $d(x, y) =$ عدد المساقط المتقابلة المختلفة للعنصرين x و y . (إذا كان $x = (x_1, x_2, x_3)$ ، فإننا نسمي x_i المسقط الـ i للعنصر x . ان هذا الفضاء والفضاءات المماثلة التي عناصرها مرتبات n ترد في التحويل ونظرية الاوتوماتا وفي التصنيف . يسمى $d(x, y)$ مسافة هامنغ بين x و y) .

١١- أثبت صحة المتباينة (1) .

١٢- (متباينة المثلث) . لمتباينة المثلث نتائج مفيدة عدة . فمثلا ، أثبت استنادا الى (1) أن

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$$

١٣- أثبت استنادا الى متباينة المثلث أن

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

١٤- (موضوعات المتترك) . من الممكن الاستعاضة عن (١م) - (٤م) بموضوعات أخرى (دون تغيير التعريف) . يبين على سبيل المثال أن (٣م) و (٤م) تستنتجان من (٢م) ومن المتباينة

$$d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$$

١٥- يبين أن كون المتترك أكبر من الصفر أو يساويه تنتج من (٢م) - (٤م) .

٢-١ امثلة اخرى على الفضاءات المترية

سنورد الآن ثلاثة من الامثلة الاضافية ، بهدف ايضاح مفهوم الفضاء المترى وطريقة التحقق من موضوعات المتترك ، وبصورة خاصة متباينة المثلث (٤م) . والمثال الاخير ١٥ هو أهمها من حيث تطبيقاته .

يتألف هذا الفضاء من مجموعة كل المتتاليات (المحدودة وغير المحدودة) التي حدودها أعداد عقدية ، ومن المترك d المعرف بالدستور

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

حيث $x = (\xi_i)$ و $y = (\eta_i)$. لاحظ أن المترك في المثال ١-١-٦ لن يكون مناسباً في الحالة الراهنة . (لماذا ؟)

ان الموضوعات (١م) - (٣م) محققة ، الامر الذي يمكن رؤيته بكل بساطة .
ستحقق الآن من الموضوع (٤م) . سنستعمل لهذا الغرض الدالة المساعدة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالمساواة

$$f(t) = \frac{t}{1+t}$$

وبالاشتقاق نجد أن $f'(t) = 1/(1+t)^2$ ، وهو مقدار موجب . لذا فان f رتيبة متزايدة . وبالتالي فان

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

وهذا يقتضي أن يكون

$$f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|)$$

نستنتج من هذا استناداً الى عبارة f والى متباينة المثلث بالنسبة للاعداد أن

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} . \end{aligned}$$

سنضع في هذه المتباينة $a = \xi_i - \zeta_i$ و $b = \zeta_i - \eta_i$ ، حيث $z = (\zeta_i)$. اذن $a + b = \xi_i - \eta_i$ ، وبالتالي فان

$$\frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} \leq \frac{|\xi_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \zeta_i|} + \frac{|\zeta_i - \eta_i|}{1 + |\zeta_i - \eta_i|}$$

واذا ضربنا طرفي هذه المتباينة بـ $1/2^i$ ثم جمعنا من $i = 1$ حتى ∞ ، فاننا نجد $d(x, y)$ في اليسار ومجموع $d(x, z)$ و $d(z, y)$ في اليمين ، أي :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

وبذا نكون قد وجدنا (م) وأثبتنا أن s هو فضاء مترى .

٢-٢-١ فضاء الدوال المحدودة $B(A)$

ان كل عنصر x من $B(A)$ هو بالتعريف دالة معرفة ومحدودة على مجموعة A ، والمترك يحدد بالمساواة

$$d(x, y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)|$$

حيث يشير \sup الى الحد الاعلى . وفي الحالة $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ، فاننا نشير الى $B(A)$ بالشكل $B[a, b]$.

سنبين الآن أن $B(A)$ فضاء مترى . من الواضح مباشرة أولا صحة الموضوعتين (م) و (٣م) . كذلك ، فان المساواة $d(x, y) = 0$ واضحة . وبالعكس ، فاذا كان $d(x, x) = 0$ فان $x(t) - y(t) = 0$ أيأ كان t من A ، وهذا يعني أن $x = y$. وبذا نكون قد أثبتنا صحة (٢م) . كذلك . نلاحظ الآن أنه أيأ كان t من A فان

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

$$\leq \sup_{t \in A} |x(t) - z(t)| + \sup_{t \in A} |z(t) - y(t)|.$$

وهذا يبين أن $x \sim y$ دالة محددة على A . وبما أن العبارة الواردة في السطر
الآخر ليست تابعة للمتغير t ، فإنه يمكن أن نأخذ الحد الأعلى في اليسار ،
ونجد بذلك (م) .

٣-٢-١ الفضاء l^p ، فضاء المتتاليات لهبرت l^2 ، متباينة هولدر ومنكوفسكي في الجاميع

ليكن p عددا حقيقيا مثبتا أكبر من 1 أو يساويه . نعرف كل عنصر من
الفضاء l^p بأنه متتاليه $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ من الاعداد بحيث تكون المتسلسلة
 $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \dots$ متقاربة . اذن

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$$

(حيث p عدد مثبت أكبر من 1 أو يساويه) . ويعرف المتك $\sum |\xi_j|^p$ بالمساواة

$$(2) \quad d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p}$$

حيث $y = (\eta_j)$ و $\sum |\eta_j|^p < \infty$. وإذا أخذنا المتتاليات الحقيقية فقط [التي تحقق
(1)] ، فإننا نجد **الفضاء الحقيقي** l^p . أما إذا أخذنا المتتاليات العقدية [التي
تحقق (1)] ، فإننا نجد **الفضاء العقدي** l^p . (عندما يكون التمييز ضروريا ،
فيمكن ان نضيف الى l^p الدليل السفلي \mathbb{R} في الحالة الاولى أو الدليل السفلي
 \mathbb{C} في الحالة الثانية) .

وفي الحالة $p=2$ ، فإننا نجد فضاء المتتاليات لهبرت l^2 ، حيث يحدد
المتك بالمساواة

$$(3) \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2}$$

وقد أورد هذا الفضاء ودرسه د. هلبيرت (١٩١٢) لدى بحثه للمعادلات التكاملية ، ويمثل هذا الفضاء أول الامثلة على مانسميه الآن بفضاء هلبيرت . (سنتناول فضاءات هلبيرت بتفصيل زائد ، بدءا من الفصل الثالث) .

سنثبت الآن أن l^p هو فضاء مترى . من الواضح أولا أن (2) تحقق الموضوعات من (١م) حتى (٣م) شريطة تقارب المتسلسلة في الطرف الايمن . سنثبت أن هذه المتسلسلة تتقارب فعلا ، وأن (٤م) محققة ، وسنقوم بهذا العمل خطوة خطوة ، وذلك بأن نستنتج

- (أ) المتباينة المساعدة ،
- (ب) متباينة هولدر من (أ) ،
- (ج) متباينة منكوفسكي من (ب) ،
- (د) متباينة المثلث (٤م) من (ج) .

والتفاصيل هي كالتالي :

(أ) ليكن p عددا أكبر من 1 ، ولنعرف q بالمساواة

$$(4) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

يسمى p و q عندئذ اسين مترافقين ، وهو مصطلح متعارف عليه . نستنتج من (4) أن

$$(5) \quad 1 = \frac{p+q}{pq}, \quad pq = p+q, \quad (p-1)(q-1) = 1.$$

وبالتالي فإن $1/(p-1) = q-1$ ، اذن

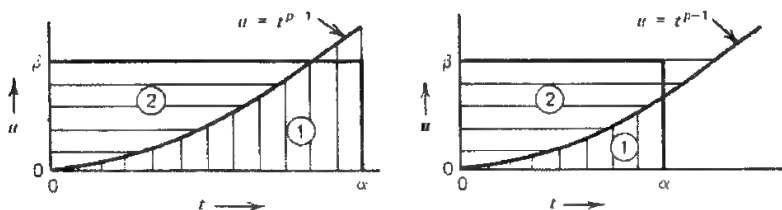
$$t = u^{q-1} \quad \text{تقتضي} \quad u = t^{p-1}$$

ليكن α و β أي عددين موجبين . لما كان $\alpha\beta$ هو مساحة المستطيل الوارد

في الشكل (٥) ، فإننا نجد بالمكاملة المتباينة

$$(6) \quad \alpha\beta \equiv \int_0^a t^{p-1} dt + \int_0^\beta u^{q-1} du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

• لاحظ أن هذه المتسلسلة صحيحة وضوحا عندما $\alpha=0$ أو عندما $\beta=0$.



الشكل (٥). المتباينة (٦) ، حيث ① يوافق التكامل الايسر في (٦) ،
و ② يوافق التكامل الایمن

(ب) لتكن $(\bar{\xi}_j)$ و $(\bar{\eta}_j)$ متتاليتين تحققان الشرطين

$$(7) \quad \sum |\bar{\xi}_i|^p = 1, \quad \sum |\bar{\eta}_i|^q = 1.$$

إذا وضعنا $\alpha = |\tilde{\xi}_i|$ و $\beta = |\tilde{\eta}_i|$ ، فإننا نستنتج من (6) المتباينة

$$|\tilde{\xi}_j \tilde{\eta}_l| \leq \frac{1}{p} |\tilde{\xi}_j|^p + \frac{1}{q} |\tilde{\eta}_l|^q.$$

وباجراء الجمع بالنسبة لـ j والافادة من (7) و (4) ، نجد المتباينة

$$(8) \quad \sum |\bar{\xi}_i \bar{\eta}_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

لنأخذ الآن أي متتاليتين غير صفريتين $x = (\xi_i) \in l^p$ و $y = (\eta_i) \in l^q$ ،

$$(9) \quad \bar{\xi}_i = \frac{\xi_i}{\left(\sum |\xi_k|^p\right)^{1/p}}, \quad \bar{\eta}_i = \frac{\eta_i}{\left(\sum |\eta_m|^q\right)^{1/q}}.$$

عندئذ تكون (7) محققة ، وبالتالي من الممكن استخدام (8) • وبتعويض (9) في (8) وضرب المتباينة الناتجة بجداء المقامين في (9) ، فاننا نجد متباينة هولدر للمجاميع :

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{1/q}$$

حيث $p > 1$ و $1/p + 1/q = 1$ • وقد توصل هولدر الى هذه المتباينة عام ١٨٨٩ • وفي الحالة $p=2$ ، يكون $q=2$ ، وعندها تعطى (10) متباينة كوشي - شفارتز للمجاميع :

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}.$$

من السابق لأوانه الحديث المستفيض عن الحالة $p=q=2$ ، التي يساوي فيها p مرافقه الاسي q ، بيد أننا نود على الاقل ايراد ملاحظة مختصرة تفيد بأن هذه الحالة ستلعب دورا خاصا في بنود من الفصول القادمة ، وتقود الى فضاء لهبرت « أظرف » من تلك الفضاءات حيث يكون $p \neq 2$ •

(ج) سنثبت الآن صحة متباينة منكوفسكي للمجاميع :

$$(12) \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p\right)^{1/p}$$

حيث $x = (\xi_i) \in l^p$ و $y = (\eta_i) \in l^p$ و $p \geq 1$ • وقد توصل منكوفسكي الى هذه المتباينة ، لكن في حالة المجاميع المنتهية ، في عام ١٨٩٦ •

في الحالة $p=1$ ، فإن هذه المتباينة تنتج رأساً من متباينة المثلث بالنسبة
للاعداد . لنفترض الآن $p>1$. لتبسيط الدساتير ، سنفترض $\xi_j + \eta_j = \omega_j$. ان
متباينة المثلث في حال الاعداد تعطي

$$|\omega_j|^p = |\xi_j + \eta_j| |\omega_j|^{p-1} \\ \leq (|\xi_j| + |\eta_j|) |\omega_j|^{p-1}.$$

وبالجمع بالنسبة الى j من 1 الى أي عدد مثبت n نجد أن

$$(13) \quad \sum |\omega_j|^p \leq \sum |\xi_j| |\omega_j|^{p-1} + \sum |\eta_j| |\omega_j|^{p-1}.$$

وبتطبيق متباينة هولدر على المجموع الاول في الطرف الايمن نجد أن

$$\sum |\xi_j| |\omega_j|^{p-1} \leq \left[\sum |\xi_k|^p \right]^{1/p} \left[\sum (|\omega_m|^{p-1})^q \right]^{1/q}$$

مع ملاحظة أنه يمكن أن نضع في المضروب الايمن p بدلاً من جداء الاسين $p-1$
و q ، ذلك أن $pq = p+q$ كما هو واضح في (5) . وإذا تعاملنا مع الطرف
الايمن في (13) بصورة مماثلة ، فانا نجد أن

$$\sum |\eta_j| |\omega_j|^{p-1} \leq \left[\sum |\eta_k|^p \right]^{1/p} \left[\sum |\omega_m|^p \right]^{1/q}.$$

وبالتالي فانا نستنتج أن

$$\sum |\omega_j|^p \leq \left\{ \left[\sum |\xi_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum |\eta_k|^p \right]^{1/p} \right\} \left(\sum |\omega_m|^p \right)^{1/q}.$$

وبالتقسيم على المضروب الاخير في الطرف الايمن من المتباينة وملاحظة أن
 $1-1/q = 1/p$ ، فانا نجد (12) لكن n ترد عوضاً عن ∞ . لنجعل الآن
 $n \rightarrow \infty$. عندها نجد في اليمين متسلسلتين متقاربتين لان $x, y \in l^p$. اذن
فالمسلسلة في اليسار تتقارب أيضاً ، وبذا يتم اثبات (12) .

(د) يترتب على (12) أنه اذا كان x و y في l^p ، فإن المتسلسلة في (2)

تتقارب . كذلك ، فإن (12) تعطي متباينة المثلث ، ذلك أنه إذا كانت x و y و z من l^p ، وكتبنا $z = (\zeta_i)$ ، فإننا نجد بالاستعانة بمتباينة المثلث بالنسبة للأعداد وبالمتباينة (12) أن

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum [|\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i|]^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum |\xi_i - \zeta_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum |\zeta_i - \eta_i|^p \right)^{1/p} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

وبذا يكتمل اثبات أن l^p هو فضاء متري .

ان المتباينتين (10) و (12) اللتين وجدناهما في سياق البرهان بالغنا الاهمية، كما وأنهما تشكلان أداتين لا غنى عنهما في العديد من المسائل النظرية والعملية ، وسنستخدمهما مرات عدة في أبحاثنا القادمة .

مسائل

١ - أثبت أنه يمكننا الحصول في 1.2-1 على مترك آخر عند الاستعاضة عن $1/2^i$ بالعدد $\mu_i > 0$ بحيث تتقارب المتسلسلة $\sum \mu_i$.

٢ - يبين باستخدام (6) أن الوسط الهندسي لعددتين موجبتين لا يكبر وسطهما الحسابي .

٣ - أثبت أن متباينة كوشي - شقارتز (11) تقتضي المتباينة

$$(|\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^2 \leq n(|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2).$$

٤ - (الفضاء l^p) . أوجد متتالية تتقارب من 0 دون أن تكون منتمية الى

أي فضاء l^p ، حيث $1 \leq p < +\infty$.

٥ - أوجد متتالية x منتمية إلى p ، حيث $p > 1$ ، ولا تنتمي إلى 1 .

٦ - (القطر ، المجموعة المحدودة) . ان القطر $\delta(A)$ لمجموعة غير خالية A في فضاء متري (X, d) يعرف بأنه

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

ونقول عن A انها محدودة اذا كان $\delta(A) < \infty$. يبين أنه اذا كان $A \subset B$ فان $\delta(A) \leq \delta(B)$.

٧ - يبين بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\delta(A) = 0$ (راجع المسألة رقم ٦) هو أن تكون A مجموعة وحيدة العنصر .

٨ - (المسافة بين المجموعات) . تعرف المسافة $D(A, B)$ بين مجموعتين غير خاليتين A و B في فضاء متري (X, d) بالمساواة

$$D(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b).$$

يبين بأن D لا تعين متركا على مجموعة أجزاء X . (لهذا السبب استعملنا رمزا آخر D ، ولكنه رغم ذلك يذكرنا بالمتري d) .

٩ - اذا كان $A \cap B \neq \emptyset$ ، فيبين أن $D(A, B) = 0$ في المسألة ٨ . ماذا يمكن قوله عن العكس ؟

١٠ - تعرف المسافة $D(x, B)$ بين النقطة x والمجموعة غير الخالية B في (X, d) بالمساواة

$$D(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b),$$

التي تتفق مع المسألة ٨ . يبين أنه أيما كان العنصران x و y من X فان

$$|D(x, B) - D(y, B)| \leq d(x, y).$$

١١- إذا كان (X, d) أي فضاء مترى ، فأثبت أن المساواة

$$\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

• تحدد متركا آخر على X ، وأن X محدودة في المترك \bar{d} .

١٢- بيّن أن اجتماع مجموعتين محدودتين A و B في فضاء مترى هو مجموعة محدودة (راجع التعريف الوارد في المسألة ٦) .

١٣- (جداء فضائين مترين) • من الممكن جعل الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2$ لفضائين مترين (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاء مترى (X, d) بأشكال مختلفة • فمثلاً، برهن أن المساواة التالية تعين متركا d

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

• حيث $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$

١٤- أثبت أنه يمكن تعريف مترك آخر على X في المسألة ١٣ بالمساواة

$$\bar{d}(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}.$$

١٥- بيّن أنه يمكن تحديد مترك ثالث على X في المسألة ١٣ بالمساواة

$$\bar{d}(x, y) = \max [d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)].$$

(ان للترتين في المسألتين ١٣ و ١٥ أهمية تطبيقية ، كما أنه يمكن تزويد X بمترك أخرى) •

٣-١ المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة ، الجوار

هنالك عدد لا بأس به من المفاهيم المساعدة التي تلعب دوراً فيما يتعلق بالفضاءات المترية • وقد ضَمَّنا هذا الفصل تلك المفاهيم التي سنحتاج إليها •

لذا ، فإن هذا الفصل يحوي مفاهيم كثيرة (أكثر من أي فصل آخر في الكتاب) ، لكن القارئ سيلاحظ أن العديد منها يغدو مألوفا تماما لدى تطبيقها على الفضاءات الاقليدية . وبالطبع فإن هذا يناسبنا جدا ، كما وأنه يبين فائدة المصطلحات التي أوجت بها الينا الهندسة التقليدية .

سنورد أولا الأنماط الهامة من المجموعات الجزئية من فضاء ميري معطى

$$X = (X, d)$$

١-٣-١ تعريف (الكرة والقشرة الكروية)

لتكن x_0 نقطة ما من X ، وليكن r عددا حقيقيا موجبا ما . لنعرف الانماط الثلاثة التالية من المجموعات الجزئية :

$$(أ) \quad B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} \quad \text{(كرة مفتوحة)}$$

$$(ب) \quad \bar{B}(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\} \quad \text{(كرة مغلقة)}$$

$$(ج) \quad S(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\} \quad \text{(قشرة كروية)}$$

وفي هذه الحالات جميعا ، فإن x_0 هو المركز و r هو نصف القطر .

نرى من هذا أن الكرة المفتوحة التي نصف قطرها r هي مجموعة كل النقاط من X التي تكون المسافة بين كل منها ومركز الكرة أصغر من r . كذلك ، فإن التعريف السابق يقتضي مباشرة أن

$$(2) \quad S(x_0; r) = \bar{B}(x_0; r) - B(x_0; r).$$

تحذير :

عند البحث في الفضاءات المترية ، فإن من المفيد جدا استعمال المصطلحات المشابهة لتلك التي ترد في الهندسة الاقليدية . بيد أن علينا الاحتراس من خطر افتراض أن الكرات والقشرات الكروية في فضاء ميري كفيي تتمتع بنفس خواص الكرات والقشرات الكروية في \mathbb{R}^3 ، لأن الامر ليس كذلك . فمثلا قد تكون

الكرة خالية • كذلك ، ففي الفضاء المتقطع ١-١-٨ لدينا $S(x_0; r) = \emptyset$ ، عندما $r \neq 1$ • (ماذا يمكن قوله عن القشرات الكروية التي نصف قطرها 1 في هذه الحالة ؟) هذا ، وسنورد خواص غير عادية أخرى في أبحاثنا اللاحقة •
سننتقل الآن الى مفهومين آخرين يرتبطان فيما بينهما •

٢-٣-١ تعريف (المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها **مفتوحة** اذا حوت كرة حول كل نقطة فيها • ونقول عن مجموعة جزئية K من X انها **مغلقة** اذا كانت متممتها (في X) مفتوحة ، أي اذا كانت المجموعة $K^c = X - K$ مفتوحة •

سيرى القارئ بوضوح استنادا الى هذا التعريف أن الكرة المفتوحة هي مجموعة مفتوحة ، وأن الكرة المغلقة هي مجموعة مغلقة •

وغالبا ما تسمى الكرة المفتوحة $B(x_0; \varepsilon)$ التي نصف قطرها ε **الجوار- ε للنقطة x_0** • (هنا يكون $\varepsilon > 0$ وفق التعريف ١-٣-٣) ونطلق اسم **الجوار** للنقطة x_0 على كل مجموعة جزئية من X تحوي جوارا ε - للنقطة x_0 •

نستنتج مباشرة من هذا التعريف أن أي جوار للنقطة x_0 يحوي x_0 ، وبعبارة أخرى ، فإن x_0 هي نقطة من كل جوار لها • وإذا كان N جوارا للنقطة x_0 ، وكان $N \subset M$ ، فإن M جوار أيضا للنقطة x_0 •

نقول عن x_0 انها **نقطة داخلية** من المجموعة M في X اذا كان M جوارا للنقطة x_0 • ويعرف **داخل M** بأنه مجموعة كل النقاط الداخلية من M ، ونرمز له بـ M^0 أو $\text{Int}(M)$ ، ولكن لا وجود لرمز متفق عليه تماما • ان $\text{Int}(M)$ هي مجموعة مفتوحة ، وهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في M •

وليس من العسير اثبات أن جملة كل المجموعات المفتوحة في X ، ولتكن \mathcal{T} ، تحقق الخواص التالية :

(ط١) $\emptyset \in \mathcal{T}$ و $X \in \mathcal{T}$ ،

(ط٢) اجتماع أي عناصر من \mathcal{T} هو عنصر من \mathcal{T} ،

(ط٣) تقاطع أي عدد منته من عناصر \mathcal{T} هو عنصر من \mathcal{T} .

البرهان :

ان (ط١) تنتج بملاحظة أن \emptyset مفتوحة لان \emptyset لا تحوي عناصر ، وإن X مفتوحة وضوحا . لنثبت صحة (ط٢) . ان كل نقطة من الاجتماع U لمجموعات مفتوحة تنتمي الى واحدة (على الاقل) من هذه المجموعات ، ولتكن M ، كما أن M تحوي كرة B حول x لكون M مفتوحة . لذا فان $B \subset U$ وفق تعريف الاجتماع . وهذا يثبت صحة (ط٢) . وأخيرا ، فاذا كانت y أي نقطة من تقاطع المجموعات المفتوحة M_1, \dots, M_n ، فان كلا من M_i تحوي كرة حول y ، وأصغر هذه الكرات محتواة في التقاطع ، الامر الذي يثبت صحة (ط٣) .

ونذكر هنا بأن الخواص (ط١) - (ط٣) هي جد أساسية ، حتى أننا سنعيدها في اطار أوسع . ونعني بهذا أننا سنعرف الفضاء الطوبولوجي (X, \mathcal{T}) بأنه مجموعة X مزودة بجماعة \mathcal{T} من المجموعات الجزئية من X بحيث تحقق \mathcal{T} الموضوعات (ط١) حتى (ط٣) . تسمى الجماعة \mathcal{T} طوبولوجيا على X . نستنتج من هذا التعريف ما يلي :

الفضاء المترى هو فضاء طوبولوجي .

وتلعب المجموعات المفتوحة دورا كذلك لدى دراسة التطبيقات المستمرة ، حيث يشكل الاستمرار تعميما طبيعيا للاستمرار الذي قابلناه في بحوث الحساب التفاضلي والتكاملي ، والذي نعرفه كما يلي .

٢-٢-١ تعريف (التطبيقات المستمرة)

ليكن $X = (X, d)$ و $Y = (Y, \bar{d})$ فضاءين مترين . نقول عن تطبيق $T: X \rightarrow Y$ انه مستمر في النقطة x_0 من X اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد

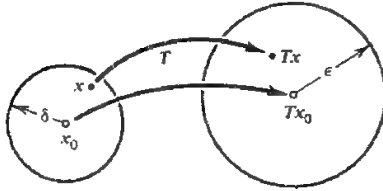
موجب δ بحيث يكون (انظر الشكل ٦)

$$\bar{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

أيًا كانت النقطة x التي تحقق الشرط

$$d(x, x_0) < \delta.$$

ونقول عن T انه مستمر اذا كان مستمرا في كل نقطة من X .



الشكل (٦) . يوضح هذا الشكل المتباينتين السابقتين في الفضاءين الاقليديين

$$Y = \mathbb{R}^2 \text{ و } X = \mathbb{R}^2$$

من المهم والمفيد معا معرفة أنه يمكن وصف التطبيقات المستمرة بدلالة المجموعات المفتوحة على النحو التالي :

١-٣-٤ مبرهنة (التطبيق المستمر)

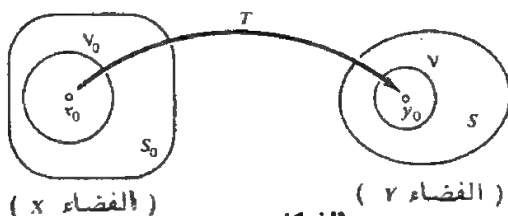
الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق T لفضاء مترى X في فضاء مترى Y مستمرا هو أن يكون الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة في Y (وفق T) مجموعة مفتوحة في X .

البرهان :

(١) لنفترض أن T مستمر ، وأن S مجموعة جزئية مفتوحة من Y ، وأن S_0 الخيال العكسي لـ S . فإذا كانت S_0 خالية ، فإنها مفتوحة . لنفترض $S_0 \neq \emptyset$. فإذا كان x_0 عنصرا من S_0 ، فالتنا نضع $y_0 = Tx_0$. وبما أن S مفتوحة

فانها تحوي جوارا ε ، وليكن N ، للنقطة y_0 ، انظر الشكل (v) . وبما أن T مستمر فانه يوجد النقطة x_0 جوار δ ، وليكن N_0 ، بحيث يكون خياله N . وبما أن $N \subset S$ ، فإن $N_0 \subset S_0$ ، وبالتالي فإن S_0 مجموعة مفتوحة لان x_0 نقطة اختيارية في S_0 .

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X . عندئذ يكون الخيال العكسي S_0 لكل كرة مفتوحة N مركزها Tx_0 ونصف قطرها ε مجموعة مفتوحة ، وذلك لكون N مجموعة مفتوحة ولكون S_0 حاوية لـ x_0 . لذا فإن S_0 تحوي جوارا δ للنقطة x_0 وليكن N_0 خياله محتوي في N ، وذلك لان خيال S_0 محتوي في N .



الشكل (v)

وبالتالي ، فاننا نستنتج استنادا الى التعريف أن T مستمر في النقطة x_0 . ولما كانت النقطة x_0 اختيارية ، فإن T تطبيق مستمر .

سنورد الآن مفهومين آخرين ، يرتبط أحدهما بالآخر . لتكن M مجموعة جزئية من فضاء متري X . تسمى النقطة x_0 من X (التي قد تنتمي الى M وقد لا تنتمي اليها) نقطة تراكم للمجموعة M (أو نقطة حدية للمجموعة M) اذا حوى كل جوار للنقطة x_0 نقطة واحدة على الاقل y من M مغايرة للنقطة x_0 . وتسمى المجموعة المألوفة من نقاط M ومن نقاط التراكم للمجموعة M لصاقة M ، ويرمز للصاقة بالشكل

$$\bar{M}.$$

وهذه المجموعة هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي M .

سنورد كذلك خاصة أخرى غير مألوفة للكرات في فضاء متري . ففي حين

تكون اللصاقة $\overline{B(x_0; r)}$ للكرة المفتوحة $B(x_0; r)$ في \mathbb{R}^3 هي الكرة المغلقة $\bar{B}(x_0; r)$ ، فان هذا الامر قد لا يصح في الفضاءات المترية العامة . وتترك للقارئ التحقق من صحة هذا الامر بايراده أحد الامثلة .

سنستخدم مفهوم اللصاقة كي نورد الآن تعريفا ذا أهمية خاصة في أبحاثنا القادمة .

١-٢-٥ تعريف (المجموعة الكثيفة ، الفضاء الفصول)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها كثيفة في X اذا كان

$$\bar{M} = X.$$

ونقول عن X انه فصول اذا حوى مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في X .
 يترتب على هذا أنه اذا كانت M كثيفة في X ، فان أي كرة مهما كانت صغيرة في X ستحوي نقاطا من M . وبعبارة أخرى ، فلا يمكن في هذه الحالة أن توجد نقطة x في X لها جوار غير حاوٍ على نقاط من M .

سنرى فيما بعد أن الفضاءات الفصول أبسط الى حد ما من الفضاءات غير الفصول . وسنورد فيما يلي بعض الامثلة الهامة على فضاءات فصول ، وأخرى غير فصول ، وذلك بهدف ادراك بعض المفاهيم الاساسية بصورة أفضل .

أمثلة

١-٢-٦ المحور الحقيقي \mathbb{R} . المحور الحقيقي \mathbb{R} فصول

البرهان :

ان هذا ناتج عن أن مجموعة الاعداد العادية \mathbb{Q} هي مجموعة عدودة وكثيفة في \mathbb{R} .

٧-٢-١ المستوى العقدي C • المستوى العقدي فصول

البرهان :

يعود السبب في هذا الى أن مجموعة الاعداد العقدية التي أقسامها الحقيقية وأقسامها التخيلية أعداد عادية هي مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في C •

٨-٣-١ الفضاء المتري المتقطع

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتري المتقطع X فصولا هو أن تكون X عدودة •

البرهان :

ان تعريف المتري المتقطع (٨-١-١) يقتضي ألا تكون أي مجموعة جزئية محتواة تماما في X مجموعة كثيفة في X • وبالتالي فإن المجموعة الكثيفة الوحيدة في X هي X نفسها ، الامر الذي يعني صحة الدعوى •

٩-٣-١ الفضاء l^∞ • الفضاء l^∞ غير فصول (٦-١-١)

البرهان :

لتكن $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$ متتالية كل من عناصرها اما 1 واما 0 • عندئذ يكون $y \in l^\infty$ • لنقرن بالمتتالية y العدد الحقيقي η الذي تمثيله الثنائي هو

$$\frac{\eta_1}{2^1} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta_3}{2^3} + \dots$$

فاذا أدخلنا في اعتبارنا أن مجموعة نقاط الفترة $[0, 1]$ غير عدودة ، وأن لكل عدد η من $[0, 1]$ تمثيلا ثنائيا ، وان للاعداد المختلفة η تمثيلات ثنائية مختلفة ، فاننا نستنتج وجود مجموعة غير عدودة من المتتاليات التي عناصر كل منها اما 1 واما 0 • ويبين المتري على l^∞ أن المسافة بين أي متتاليتين مختلفتين من هذا الفضاء يجب أن تكون مساوية للواحد • فاذا جعلنا كلا من هذه المتتاليات

مركزا لكرة صغيرة نصف قطرها $1/3$ مثلا ، فان هذه الكرات لا تتقاطع ، وبالتالي فاننا نجد مجموعة غير عدودة منها . واذا كانت M أي مجموعة كثيفة في I^p ، فان كلا من هذه الكرات المتقاطعة يحوي عنصرا من M ، لذا فلا يمكن أن تكون M عدودة . وبما أن M مجموعة عدودة اختيارية ، فاننا نستنتج أن I^p لا يمكن أن يحوي مجموعات كثيفة بحيث تكون هذه المجموعات عدودة . لذا فان I^p غير فصول .

١٠-٣-١ الفضاء I^p . الفضاء I^p ، حيث $1 \leq p < +\infty$ ، فصول (١-٢-٣)

البرهان :

لتكن M مجموعة كل المتتاليات y التي هي من الشكل

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, 0, \dots)$$

حيث n أي عدد صحيح موجب ، وحيث الاعداد η_i عادية . من الواضح أن M عدودة . سنبين الآن أن M كثيفة في I^p . لهذا نفترض أن $x = (\xi_i) \in I^p$ عنصر ما . عندئذ يوجد لكل عدد موجب تماما ε عدد صحيح موجب n (تابع لـ ε) بحيث يكون

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

وذلك لان الطرف الايسر من هذه المتباينة هو باقي متسلسلة مقاربة . ولما كانت مجموعة الاعداد العادية كثيفة في \mathbf{R} ، فانه يوجد لكل ξ_i عدد عادي η_i قريب منه . لذا فيمكننا ضمان وجود عنصر y من M يحقق الشرط

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

يترتب على هذا أن

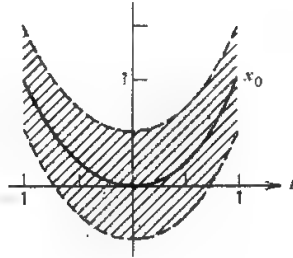
$$[d(x, y)]^p = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p.$$

لذا نجد أن $d(x, y) < \varepsilon$ ، وبالتالي فاننا نرى أن M كثيفة في \mathbb{R}^p .

مسائل

١ - برز استعمالنا لمصطلحي « الكرة المفتوحة » و « الكرة المغلقة » وذلك باثبات أن : (أ) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة ، (ب) كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة .

٢ - ما هي الكرة المفتوحة $B(x_0; 1)$ في \mathbb{R} ؟ وما هي في \mathbb{C} ؟ (١-١-٥) .
 ما هي هذه الكرة في $C[a, b]$ ؟ (١-١-٧) . اشرح الشكل (٨) .



الشكل (٨) . المنطقة الحاوية على بيانات الدوال x المنتمية الى $C[-1, 1]$ والتي تشكل الجوار ε ، حيث $\varepsilon = 1/2$ ، للدالة x_0 من $C[-1, 1]$ ، بفرض أن $x_0(t) = t^2$

٣ - لنأخذ الفضاء $C[0, 2\pi]$. عيّن أصغر عدد r بحيث يكون $y \in \bar{B}(x; r)$ ، بفرض أن $x(t) = \sin t$ و $y(t) = \cos t$.

٤ - يبيّن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون كل مجموعة غير خالية A في فضاء متري (X, d) مفتوحة هو أن تكون اجتماعا لكرات مفتوحة .

٥ - من المهم أن ندرك بأن بعض المجموعات قد تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحد . (أ) بين أن هذا صحيح دوما في المجموعتين X و \emptyset . (ب) أثبت

أنه إذا أخذنا فضاء متريا متقطعا (X, ρ) فإن كل مجموعة جزئية فيه مفتوحة ومغلقة معا .

٦ — إذا كانت x_0 نقطة تراكم في مجموعة $A \subset (X, d)$ ، فبين أن أي جوار للنقطة A تحوي عددا غير منته من نقاط A .

٧ — صف لصاقة كل من المجموعات الجزئية التالية : (أ) مجموعة الاعداد الصحيحة في \mathbb{R} . (ب) مجموعة الاعداد العادية في \mathbb{R} . (ج) مجموعة الاعداد المقدية التي أقسامها الحقيقية والتخيلية أعداد عادية . (د) القرص $\{z \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$.

٨ — بين أن اللصاقة $\overline{B(x_0; r)}$ لكرة مفتوحة $B(x_0; r)$ في فضاء متري يمكن أن تكون مختلفة عن الكرة المغلقة $\bar{B}(x_0; r)$.

٩ — أثبت أن $A \subset \bar{A}, \bar{\bar{A}} = \bar{A}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

١٠ — إذا كانت x نقطة ليست منتمة الى مجموعة مغلقة M في (X, d) ، فإن المسافة بين النقطة والمجموعة لا تساوي الصفر . لا ثبات هذا ، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{A}$ هو أن يكون $D(x, A) = 0$ (راجع المسألة ١٠ من البند ٢-١) . ان A هنا هي أي مجموعة جزئية غير خالية في X .

١١ — (الجبهة أو الحد) . نقول عن نقطة x انها نقطة جبهة لمجموعة A في (X, d) إذا كانت x نقطة من X (قد تنتمي الى A أو لا تنتمي اليها) بحيث يحوي أي جوار لـ x نقاطا من A ونقاطا لا تنتمي الى A . وتسمى مجموعة النقاط الجبهة لـ A جبهة (أو حد) A . حدد جبهة كل من المجموعات التالية : (أ) الفترات $(-1, 1)$ و $[-1, 1]$ في \mathbb{R} . (ب) مجموعة الاعداد العادية في \mathbb{R} . (ج) القرص $\{z \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ والقرص $\{z \mid |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$.

١٢ — (الفضاء $B[a, b]$) . بين أن الفضاء $B[a, b]$ ، حيث $a < b$ ، غير فصول (٢-٢-١)

١٣- يبين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء متري X فصولاً هو أن يوجد في X مجموعة جزئية عدودة Y تتمتع بالخاصة التالية : يوجد لكل عدد موجب تماماً ε ولكل عنصر x من X عنصر y من Y بحيث يكون

$$d(x, y) < \varepsilon$$

١٤- (التطبيق المستمر) . أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \rightarrow Y$ مستمراً هو أن تكون الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة M في Y مجموعة مغلقة في X .

١٥- يبين أن صورة المجموعة المفتوحة وفق تطبيق مستمر ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة .

١- التقارب ، متتالية كوشي ، التمام

نحن نعلم بأن متتاليات الأعداد الحقيقية تلعب دوراً هاماً في الحساب التفاضلي والتكاملي ، وأن المتركة على \mathbb{R} هو الذي يمكننا من تعريف المفهوم الأساسي لتقارب هذه المتتاليات . ان هذا الكلام يسري على متتاليات الأعداد العقدية كذلك ، ذلك أننا نستعمل في هذه الحالة المتركة المعروف على المستوي العقدي . ان الأمور تسير بصورة مماثلة في حالة الفضاءات المترية العامة $X = (X, d)$ ، أي أننا هنا نأخذ متتالية (x_n) من العناصر x_1, x_2, \dots في X ، ونستعمل المتركة d بهدف تعريف التقارب بصورة مشابهة لما فعلناه في الحساب التفاضلي والتكاملي .

١-٤-١ تعريف (تقارب المتتاليات . النهاية)

نقول عن متتالية في فضاء متري $X = (X, d)$ أنها متقاربة إذا وجد عنصر x من X بحيث يكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

تسمى x نهاية المتتالية (x_n) ، ونكتب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

أو

$$x_n \longrightarrow x.$$

وعندئذ نقول بأن (x_n) تتقارب من x ، أو إن x نهاية المتتالية (x_n) . وإذا لم تكن (x_n) متقاربة ، قلنا انها متباعدة .

كيف يستعمل المترك d في هذا التعريف ؟ نحن نرى بأن d تعطي متتالية من الاعداد الحقيقية $a_n = d(x_n, x)$ ، بحيث أن تقاربها يعرف تقارب المتتالية (x_n) . يترتب على هذا أنه اذا كان $x_n \longrightarrow x$ ، وكان $\varepsilon > 0$ عددا معطى ، فانه يوجد عدد صحيح موجب $N = N(\varepsilon)$ بحيث أن جميع العناصر x_n ، حيث $n > N$ ، تقع في الجوار ε للنقطة x (أي في $B(x; \varepsilon)$) .

ولتجنب سوء فهم قد يحدث ، فاننا نلاحظ أن نهاية متتالية متقاربة يجب يجب أن يكون نقطة من الفضاء X في ١-٤-١ . لنفترض مثلاً أن X هو الفترة المفتوحة $(0, 1)$ في \mathbb{R} المزودة بالمترك المألوف المعروف بالمساواة $d(x, y) = |x - y|$. عندئذ لا تكون المتتالية $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ متقاربة ، ذلك أن النقطة 0 التي « تود المتتالية أن تتقارب منها » ليست واقعة في X . وسنعود الى هذا الموضوع والى مواضيع مشابهة في البند الحالي .

لنبن أولاً أن خاصيتين مألوفتين للمتتاليات المتقاربة (وهما وحدانية النهاية والمحدودية) ينتقلان من الفضاء \mathbb{R} الى الفضاءات المترية العامة .

نقول عن مجموعة جزئية M في X انها مجموعة محدودة اذا كان قطرها

$$\delta(M) = \sup_{x, y \in M} d(x, y)$$

عددا منتهيا • ونقول عن متتالية (x_n) في X انها متتالية محدودة واذا كانت المجموعة المؤلفة من حدودها مجموعة محدودة في X •

ومن الواضح أنه اذا كانت M محدودة ، فان $M \subset B(x_0; r)$ ، حيث x_0 أي نقطة في X ، و r عدد حقيقي موجب (كبير بقدر كاف) ، والعكس صحيح •

١-٢ تمهيدية (المحدودية ، النهاية)

اذا كان $X = (X, d)$ فضاء متريا ، فان :

- (أ) كل متتالية مقاربة في X محدودة ، ونهايتها وحيدة •
 (ب) اذا كان $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ في X ، فان $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ •

البرهان :

(أ) لنفترض أن $x_n \rightarrow x$ • لذا فانه اذا أخذنا $\varepsilon = 1$ ، فاننا نتسكن من ايجاد عدد صحيح موجب N بحيث تتحقق المتباينة $d(x_n, x) < 1$ ايا كان n الذي يحقق الشرط $n > N$ • يترتب على هذا استنادا الى متباينة المثلث (٤م) من البند ١-١ أنه ايا كان n ، فان $d(x_n, x) < 1 + a$ ، حيث

$$a = \max \{d(x_1, x), \dots, d(x_N, x)\}.$$

اذن فالمتتالية (x_n) محدودة • واذا افترضنا أن $x_n \rightarrow x$ و $x_n \rightarrow z$ ، فاننا نستنتج وفق (٤م) أن

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \rightarrow 0 + 0$$

وعندئذ نجد الوحدانية $x = z$ للنهاية كنتيجة للخاصة (٢م) •

(ب) لدينا استنادا الى (1) من البند ١-١

$$d(x_m, y_n) \leq d(x_m, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

لذا نجد المتباينة

$$d(x_m, y_n) - d(x, y) \leq d(x_m, x) + d(y_n, y)$$

- ومتباينة مماثلة بالمبادلة ما بين x و x_n وما بين y و y_n ثم بالضرب بـ 1 -
ويترتب على هاتين المتباينتين أن

$$|d(x_m, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_m, x) + d(y_n, y) \rightarrow 0$$

عندما $n \rightarrow \infty$ ■ •

سنحدد الآن مفهوم التمام في الفضاءات المترية ، ذلك المفهوم الذي سيكون أساسيا في أبحاثنا القادمة • وسنرى أن التمام لا ينتج عن (م) - (م) من البند ١-١ ، ذلك أن ثمة فضاءات مترية ليست تامة • وبعبارة أخرى فإن التمام هو خاصية اضافية قد يتمتع أو لا يتمتع بها فضاء متري • ولهذه الخاصية نتائج مختلفة تجعل الفضاءات التامة « أجود وأبسط » من الفضاءات غير التامة • وسيفندو معنى هذا الكلام أوضح كلما تعمقنا في دراستنا لهذه الفضاءات •

لنذكر أولا أن الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية الحقيقية أو العقدية (x_n) في المحاور الحقيقي \mathbb{R} أو في المستوي العقدي \mathbb{C} هو أن تحقق معيار (أو رانز) تقارب كوشي ، أي أن يوجد لكل عدد موجب تاما ε عدد صحيح موجب $N = N(\varepsilon)$ بحيث تتحقق المتباينة

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

أيما كان العددين الصحيحان m, n اللذان يحققان الشرط $m, n > N$ • ان العدد $|x_m - x_n|$ هنا يمثل المسافة $d(x_m, x_n)$ بين x_m و x_n على المحاور الحقيقي \mathbb{R} أو في المستوي العقدي \mathbb{C} • لذا فمن الممكن كتابة متراجحة معيار كوشي بالشكل

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

ويمكن تسمية كل متتالية (x_n) تحقق شرط معيار كوشي متتالية كوشي . عندئذ ينص معيار كوشي ببساطة على أن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب متتالية من الاعداد الحقيقية أو الاعداد العقدية في \mathbb{R} أو في \mathbb{C} على الترتيب هو أن تكون هذه المتتالية هي متتالية كوشي . ان هذا الامر الذي يصح في \mathbb{R} و \mathbb{C} غير صحيح من سوء الحظ في فضاءات أعم ، اذ أنه قد توجد في بعض هذه الفضاءات متتاليات لكوشي دون أن تكون متقاربة . وهذه الفضاءات تعوزها خاصية هي من الاهمية لدرجة أنها تستحق ان تسمى بخاصة التمام . وقد اهاب هذا الاعتبار بفريشيه (١٩٠٦) لايراد التعريف التالي :

١-٤-٢ تعريف (متتالية كوشي ، التمام)

نقول عن متتالية (x_n) في فضاء متري $X=(X, d)$ انها متتالية لكوشي (او متتالية أساسية) اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب $N=N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (1)$$

أي كان العدداً الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n > N$. ويقال عن الفضاء X انه تام اذا كانت كل متتالية لكوشي فيه متقاربة (أي اذا وجد لها نهاية منتية الى X) .

ويقتضي معيار تقارب كوشي معبراً عنه بدلالة التمام المبرهنة التالية :

١-٤-٣ مبرهنة (المحور الحقيقي ، المستوي العقدي)

ان المحور الحقيقي والمستوي العقدي هما فضاءان متريان تامان .

وبوجه أعم ، فاننا سنرى الآن مباشرة من التعريف أن الفضاءات المترية التامة هي بالضبط تلك الفضاءات التي يبقى فيها شرط كوشي (1) شرطاً لازماً وكافياً للتقارب .

هذا وسندرس بصورة نظامية في البند التالي تلك الفضاءات المترية التامة وغير التامة والتي تحظى بأهمية بالغة من حيث تطبيقاتها .

أما الآن فسنورد عددا قليلا من الفضاءات غير التامة البسيطة والتي يمكن الحصول عليها بسرعة . ان حذف نقطة a من المحور الحقيقي يعطينا الفضاء غير التام $\mathbb{R} - \{a\}$. وبصورة أكثر تطرفا ، فاذا حذفنا كل الاعداد غير العادية فاننا نجد المحور العادي \mathbb{Q} ، وهو فضاء غير تام . والفترة المفتوحة (a, b) المزودة بمقصور المتري المعروف على \mathbb{R} توفر مثالا آخر لفضاء متري غير تام ، وهكذا .

يتضح من التعريف أن الشرط (1) في فضاء متري كفي قد لا يكون كافيا للتقارب ذلك أن الفضاء قد يكون غير تام . ان الادراك الجيد لهذا الامر على غاية من الاهمية ، لهذا سنورد المثال البسيط التالي . لنأخذ المجموعة $X = (0, 1]$ المزودة بالمتري المألوف المعروف بالمساواة $d(x, y) = |x - y|$ ، ولنأخذ المتتالية (x_n) ، حيث $x_n = 1/n$ و $n = 1, 2, \dots$. ان هذه هي متتالية كوشي ، الا انها ليست متقاربة ، ذلك أن النقطة 0 (التي «تود المتتالية أن تتقارب منها») ليست نقطة من X . وهذا يوضح أيضا أن مفهوم التقارب ليس خاصة ذاتية للمتتالية نفسها ، بل انها تعتمد أيضا على الفضاء الذي تقع فيه المتتالية . وبعبارة أخرى ، فان المتتالية المتقاربة ليست متقاربة « كيفما اتفق » ، بل انها يجب أن تتقارب من نقطة في الفضاء .

ورغم أن الشرط (1) لا يكفي للتقارب ، فمن الجدير بالملاحظة أن يبقى شرطا لازما للتقارب ، الامر الذي تبينه المبرهنة التالية .

١-٥ مبرهنة (المتتالية المتقاربة)

كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي .

البرهان :

إذا كان $x_n \rightarrow x$ ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب

$N = N(\varepsilon)$ بحيث أن

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

أيا كان العدد الصحيح n المحقق للشرط $n > N$.

يترتب على هذا استنادا الى متباينة المثلث أنه اذا كان $m, n > N$ فان

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

وهذا يثبت أن (x_n) هي متتالية كوشي . ■

سنرى أن العديد من النتائج الاساسية (في نظرية المؤثرات الخطية مثلا) تعتمد على تمام الفضاءات الواردة آنذاك . وتمام المحور الحقيقي \mathbb{R} هو أيضا السبب الرئيسي الذي يجعلنا نستعمل \mathbb{R} في الحساب التفاضلي والتكاملي بدلا من المحور العادي \mathbb{Q} (وهو مجموعة الاعداد العادية المزودة بمقصور المشترك المعرف على \mathbb{R}) .

لنختم فصلنا هذا بثلاث مبرهنات ترتبط بالتقارب والتمام ، اذ أننا نحتاج اليها في الابحاث القادمة .

١-٤-٦ مبرهنة (اللصاقة ، المجموعة المغلقة)

اذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المترى (X, d) ، وكانت \bar{M} لصاقتها المعرفة في البند السابق ، فان :

(أ) الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{M}$ هو أن توجد متتالية (x_n) في M بحيث أن $x_n \rightarrow x$.

(ب) الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو التالي : اذا كانت x_n أي متتالية من عناصر M متقاربة من x ، فان $x \in M$.

البرهان :

(أ) لنفترض أن $x \in \bar{M}$. فاذا كان $x \in M$ ، فان المتتالية (x, x, \dots) تتقارب من x . أما اذا كان $x \notin M$ ، فان x نقطة تراكم لـ M . لذا فان كل

كرة $B(x; 1/n)$ ، حيث $n=1, 2, \dots$ ، تحوي عنصرا x_n من M وبالتالي فان
 $x_n \rightarrow x$ لان $1/n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$.

وبالعكس ، فاذا كانت (x_n) متتالية في M بحيث أن $x_n \rightarrow x$ ، فان
 $x \in M$ ، أو أن كل جوار للنقطة x يحوي نقاطا x_n مغايرة للنقطة x ، وعندها
تكون x نقطة تراكم للمجموعة M . لذا فان $x \in \bar{M}$ استنادا الى تعريف اللصاقة .
(ب) لما كان الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو أن يكون
 $M = \bar{M}$ ، فان (ب) تنتج مباشرة من (أ) .

٧-٤-١ (الفضاء الجزئي التام)

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي M من فضاء مترى تام X
فضاء تاما هو أن تكون المجموعة M مغلقة في X .

البرهان :

لنفترض الفضاء الجزئي M تاما . عندئذ نجد استنادا الى (أ) من ٦-٤-١
أنه يقابل كل x من \bar{M} متتالية (x_n) في M متقاربة من x . ولما كانت
 (x_n) متتالية كوشي وفق ١-٤-٥ وكان M تاما ، فانه يوجد للمتتالية (x_n)
نهاية في M ، وهذه النهاية وحيدة استنادا الى ٢-٤-١ . إذن $x \in M$ ، الامر
الذي يبين أن M مجموعة مغلقة لان النقطة x من \bar{M} كانت كيفية .

وبالعكس ، لنفترض أن M مجموعة مغلقة ، وان (x_n) متتالية لكوشي في
 M . عندئذ نرى أن x_n تتقارب من نقطة x في X ، الامر الذي يقتضي أن
 $x \in \bar{M}$ استنادا الى (أ) من ٦-٤-١ ، وان $x \in M$ لان $M = \bar{M}$ فرضا . نستنتج
من هذا أن متتالية كوشي الاختيارية (x_n) تتقارب في M ، الامر الذي يثبت
تمام M .

ان هذه البرهنة بالغة الاهمية ، وسنستخدمها كثيرا في أبحاثنا المقبلة .
ويتضمن المثال ١-٥-٣ في البند التالي أول تطبيق نموذجي لها .

تبين المبرهنة الأخيرة من مبرهنتنا الثلاث الحالية أهمية تقارب المتتاليات
لدى بحثنا في استمرار تطبيق •

٨-٤-١ مبرهنة (التطبيق المستمر)

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \rightarrow Y$ من فضاء مترى (X, d) في فضاء مترى (Y, \bar{d}) مستمرا في نقطة x_0 من X هو أن يقتضي الشرط
• $x_n \rightarrow x_0$ الشرط $Tx_n \rightarrow Tx_0$

البرهان :

لنفترض أن T مستمر في النقطة x_0 • (راجع التعريف ٣-٣-١) عندئذ
يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ بحيث أن

$$d(x, x_0) < \delta \quad \text{يقتضي} \quad \bar{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

لنفترض أن $x_n \rightarrow x_0$ • عندئذ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أنه اذا كان
 n أي عدد صحيح يحقق الشرط $n > N$ فان

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

لذا فاننا نجد ن

$$\bar{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon.$$

أيا كان العدد الصحيح n الذي يحقق المتباينة $n > N$ • وهذا يعني تعريفاً أن
• $Tx_n \rightarrow Tx_0$

وبالعكس ، لنفترض أن الشرط $x_n \rightarrow x_0$ يقتضي $Tx_n \rightarrow Tx_0$ ، ولنثبت
أن T يكون عندئذ مستمرا في x_0 • اذا لم نقبل بصحة هذا الامر ، فانه يوجد
عدد موجب ε بحيث أنه يقابل كل عدد موجب δ عنصر x مغاير لـ
 x_0 بحيث يتحقق الشرط $d(x, x_0) < \delta$ ، ويكون في الوقت نفسه $\bar{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$ •

وبوجه خاص ، فإذا اخترنا $\delta = 1/n$ ، فيوجد x_n بحيث يتحقق الشرط $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ ، ويكون في الوقت نفسه $\bar{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$. ومن الواضح أنه عندئذ يكون $x_n \rightarrow x_0$ ، إلا أن (Tx_n) لا تتقارب من Tx_0 . ان هذا يناقض افتراضنا بأن $Tx_n \rightarrow Tx_0$ ويثبت صحة المبرهنة . ■

مسائل

١ — (المتتالية الجزئية) إذا كانت متتالية (x_n) في فضاء مترى X متقاربة وكانت نهايتها x ، فبين أن كل متتالية جزئية (x_{n_k}) من (x_n) تكون متقاربة، كما تكون لها النهاية x نفسها .

٢ — إذا كانت (x_n) متتالية كوشي ووجد لها متتالية جزئية x_{n_k} متقاربة من x ، فبين أن المتتالية (x_n) متقاربة وان لها النهاية x نفسها .

٣ — يبين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \rightarrow x$ هو أن يقابل كل جوار V للنقطة x عدد صحيح n_0 بحيث يكون $x_n \in V$ أيًا كان " المحقق للشرط $n > n_0$.

٤ — (المحدودية) أثبت أن كل متتالية لكوشي محدودة .

٥ — هل يكفي كون متتالية في فضاء مترى محدودة كي تكون متتالية لكوشي ؟ وهل تكفي هذه المحدودية لتكون المتتالية متقاربة ؟

٦ — إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين لكوشي في فضاء مترى (X, d) ، فبين أن (a_n) ، حيث $a_n = d(x_n, y_n)$ ، متتالية متقاربة . أعط أمثلة توضيحية .

٧ — قدم برهانا غير مباشر على الشق (ب) من التمهيد ١-٤-٢ .

٨ — إذا كان d_1 و d_2 متركين على مجموعة واحدة X ، ووجد عدداً موجبان a و b بحيث تتحقق المتباينة

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y),$$

أيا كان العنصران x و y من X ، فأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية ما هي متتالية لكوشي في الفضاء (X, d_1) هو أن تكون متتالية لكوشي في الفضاء (X, d_2) .

٩- أثبت بالافادة من التمرين ٨ أن الفضاءات المترية في المسألتين ١٣ و ١٥ من البند ٢-١ لها نفس متتاليات كوشي .

١٠- أثبت استنادا الى تمام الفضاء R أن الفضاء C هو فضاء تام كذلك .

٥-١ امثلة • براهين التمام

في العديد من التطبيقات ، تعطى أولا مجموعة X (كأن تكون مجموعة متتاليات أو مجموعة دوال أو غيرها) ، ومن ثم نصنع من هذه المجموعة فضاء متريا ، ويتم هذا بأن نختار متركا d على X . بعد هذا نبحت فيما اذا كان الفضاء الحاصل (X, d) يتمتع بخاصة كونه تاما . ولايثبات التمام ، فاننا نأخذ متتالية كيفية لكوشي (x_n) في X ، ثم ثبت أنها متقاربة في X . هذا وان البراهين تختلف في درجة تعقيدها ، بيد أننا نسلك فيها جميعا الخطوات العامة التالية :

- (i) نوجد عنصرا x (يستعمل كنهاية للمتتالية) .
- (ii) ثبت أن x واقع في الفضاء قيد الدرس .
- (iii) ثبت أن $x_n \rightarrow x$ (بالنسبة للمترك) .

سنقدم فيما يلي براهين التمام لبعض الفضاءات المترية التي ترد كثيرا في الابحاث النظرية والتطبيقية . وسلاحظ القارئ أننا في هذه البراهين (كما سنرى في الامثلة بدءا من ١-٥-١ وحتى ١-٥-٥) نستعين بخاصة تمام المحور الحقيقي أو المستوي العقدي (المبرهنة ١-٤-٤) .

أمثلة

١-٥-١ تمام \mathbb{R}^n و C^n • الفضاء الاقليدي \mathbb{R}^n والفضاء الوحدى C^n تامان
• (١-١-٥)

البرهان :

لنأخذ أولا \mathbb{R}^n • لقد سبق وعرفنا المترك على \mathbb{R}^n (أي المترك الاقليدي)
بالمساواة

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n (\xi_j - \eta_j)^2 \right)^{1/2}$$

حيث $x = (\xi_j)$ و $y = (\eta_j)$ (راجع (٦) من البند ١-١) • لنأخذ أية متتالية
لكوشي (x_m) في \mathbb{R}^n ، حيث $x_m = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$ ، لما كانت (x_m) متتالية
لكوشي ، فانه يقابل كل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$(1) \quad d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \quad (m, r > N).$$

ونجد بعد الترييع أنه عندما يكون $m, r > N$ و $j = 1, \dots, n$ فان

$$(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \quad \text{و} \quad |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon.$$

ويبين هذا أنه يقابل كل قيمة مثبتة لـ j ($1 \leq j \leq n$) المتتالية $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ التي هي
متتالية لكوشي من الاعداد الحقيقية • واستنادا الى المبرهنة ١-٤-٤ ، فان هذه
المتتالية تتقارب ، ولنفترض مثلاً أن $\xi_j^{(m)} \rightarrow \xi_j$ عندما $m \rightarrow \infty$ • سنعرف
باستخدام هذه النهايات التي عددها n العنصر $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ • نلاحظ بوضوح
أن $x \in \mathbb{R}^n$ وأنه يترتب على (1) عند جعل $r \rightarrow \infty$ أن

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

بين هذا أن x هي النهاية للمتتالية (x_m) ، وهذا يثبت تمام \mathbb{R}^n لان (x_m) كانت متتالية كيفية لكوشي . أما تمام \mathbb{C}^n ، فينتج عن المبرهنة ١-٤-٤ باتباع الاسلوب ذاته في البرهان .

١-٥-٢ تمام l^∞ . الفضاء l^∞ تام (١-١-٦)

البرهان :

لتكن (x_m) أي متتالية لكوشي في الفضاء l^∞ ، حيث $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots)$ لما كان المترك على l^∞ محددًا بالمساواة

$$d(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$$

[حيث $x = (\xi_i)$ و $y = (\eta_i)$] ، وكانت (x_m) متتالية كوشي . فانه يقابل كل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$d(x_m, x_n) = \sup_i |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon.$$

أيًا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $(m, n > N)$. يترتب على هذا مباشرة أنه اذا كان z أي عدد صحيح موجب مثبت ، فان

$$(2) \quad |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

لذا فان المتتالية $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots)$ أيًا كان العدد اثبتت z هي متتالية عددية لكوشي . وبالتالي فانها تتقارب استنادا الى المبرهنة ١-٤-٤ . لنفرض مثلا أن $\xi_i^{(m)} \rightarrow \xi_i$ عندما $m \rightarrow \infty$. وبأخذ هذه النهايات جميعا ξ_1, ξ_2, \dots فاننا سنعرف $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. سنبين الآن $x \in l^\infty$ وأن $x_m \rightarrow x$. نستنتج من (2) عندما $n \rightarrow \infty$ أن

$$(2^*) \quad |\xi_i^{(m)} - \xi_i| \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

بما أن $x_m = (\xi_j^{(m)}) \in l^\infty$ ، فيوجد عدد حقيقي k_m بحيث يكون $|\xi_j^{(m)}| \leq k_m$ أيا كان j . لذا يترتب على متباينة المثلث أن

$$|\xi_j| \leq |\xi_j - \xi_j^{(m)}| + |\xi_j^{(m)}| \leq \varepsilon + k_m \quad (m > N).$$

لما كانت هذه المتباينة صحيحة أيا كان j ، وكان الطرف الايمن لايعوي j ، فإن (ξ_j) متتالية محدودة من الاعداد . وبالتالي فإن $x = (\xi_j) \in l^\infty$. كذلك ، فأننا نجد من (2*) أن

$$d(x_m, x) = \sup_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

وهذا يبين أن $x_m \rightarrow x$. وبما أن (x_m) متتالية كيفية لكوشي . فإن l^∞ فضاء تام .

٣-٥-١ تمام الفضاء c .

يتألف الفضاء c من كل المتتاليات المتقاربة $x = (\xi_j)$ من الاعداد العقديّة والمزودة بسقصور المترك المعروف على l^∞ .

ان الفضاء c تام

البرهان :

ان c فضاء جزئي من l^∞ . فاذا أثبتنا أن c مغلق في l^∞ ، فأننا نستنتج تمام c ، استنادا الى المبرهنة ١-٤-٧ .

لنأخذ عنصرا اختياريا $x = (\xi_j) \in \bar{c}$ ، حيث \bar{c} لصاقة c . عندها نجد اعتمادا على الشق (آ) من ١-٤-٦ أن هنالك متتالية $x_n = (\xi_j^{(n)}) \in c$ بحيث أن $x_n \rightarrow x$. وبالتالي فإنه يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب N بحيث أنه أيا كان n الذي يحقق الشرط $n \geq N$ وأيا كان j فإن

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j| \leq d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3},$$

وبوجه خاص فإن هذا يتحقق عندما $n = N$ أي كان n • وبما أن $x_N \in c$ ، فإن حدوده $\xi_j^{(N)}$ تشكل متتالية متقاربة ، وهذه المتتالية هي متتالية كوشي • إذن هنالك عدد صحيح موجب N_1 بحيث يكون

$$|\xi_j^{(N)} - \xi_k^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (j, k \geq N_1). \quad \text{٤}$$

وعندئذ يترتب على متباينة المثلث أنه إذا كان $j, k \geq N_1$ ، فإننا نجد المتباينة التالية

$$|\xi_j - \xi_k| \leq |\xi_j - \xi_j^{(N)}| + |\xi_j^{(N)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_k| < \varepsilon.$$

وهذا يثبت أن المتتالية $x = (\xi_j)$ متقاربة ، الامر الذي يترتب عليه أن $v \in c$ • ولما كان العنصر $x \in \bar{c}$ اختياريا ، فإن c مغلقة في l^∞ • وعندئذ نستنتج تمام الفضاء c بالعودة الى المبرهنة ١-٤-٧ • ■

١-٥-١ تمام الفضاء l^p •

الفضاء l^p تام ، حيث نفترض p عددا مئبنا بحيث أن $1 \leq p < +\infty$ (راجع ١-٢-٣) •

البرهان :

لتكن (x_n) متتالية ما لكوشي في الفضاء l^p ، حيث $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots)$ • عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث تصح المتباينة

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

أي كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n > N$ •

يترتب على هذا أنه أيا كان العدد الصحيح الموجب z ، فإن

$$(4) \quad |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

لِنَخْتَرْ عددا مئبئا z • نستتج من (4) أن $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots)$ متتالية عددية لكوشي، وبالتالي فإنها متقاربة نظرا لكون الفضاءين R و C تامين (١-٤-٤) • لنفترض مثلا أن $\xi_i^{(m)} \rightarrow \xi_i$ عندما $m \rightarrow \infty$ • عندئذ يمكننا أن نستخدم هذه النهايات لتعريف العنصر $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ، ومن ثم اثبات أن $x \in l^p$ وأن $x_m \rightarrow x$ •

نستتج من (3) أنه اذا كان m, n أي عددين صحيحين يحققان الشرط $m, n > N$ فإن

$$\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p \quad (k = 1, 2, \dots).$$

وبجعل $n \rightarrow \infty$ ، فالتنا نجد بفرض $m > N$ أن

$$\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \varepsilon^p \quad (k = 1, 2, \dots).$$

يمكننا الآن جعل $k \rightarrow \infty$ • عندها نجد بفرض $m > N$ أن

$$(5) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \varepsilon^p.$$

ان هذا يبين أن $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in l^p$ • وبما أن $x_m \in l^p$ ، فانه يترتب على متباينة منكوفسكي (12) من البند ٢-١ أن

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p.$$

وفضلا عن ذلك ، فإن المتسلسلة في (5) تمثل $[d(x_m, x)]^p$ ، وهذا يعني أن (5)

تقتضي بأن يكون $x_m \rightarrow x$ • ولما كانت (x_m) متتالية اختيارية لكوشي ، فإن هذا يثبت تمام الفضاء l^p ، حيث $1 \leq p < +\infty$ ■ •

١-٥-٥ تمام الفضاء $C[a, b]$ •

ان الفضاء الدالي $C[a, b]$ تام ، حيث $[a, b]$ أي مجال مغلق في \mathbb{R} • (راجع ١-١-٧) •

البرهان :

لتكن (x_m) متتالية كيفية لكوشي في $C[a, b]$ • لذا فاذا أعطينا عددا موجبا ε ، فانه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أنه أيا كان العددين الصحيحان m, n اللذان يكبران N فاننا نجد

$$(6) \quad d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

حيث $J = [a, b]$ • لذا فاننا نجد عند تثبيت $t = t_0 \in J$ أن

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

وهذا يبين أن $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)$ هي متتالية عددية لكوشي • وبما أن \mathbb{R} تام (١-١-٤) ، فان هذه المتتالية لابد أن تتقارب • لنفترض مثلا أن $x_m(t_0) \rightarrow x(t_0)$ عندما $m \rightarrow \infty$ • يمكننا بهذه الطريقة أن نقابل كل عنصر $t \in J$ بعدد حقيقي وحيد $x(t)$ ، وهذا يقود الى تعريف دالة x (نقطيا) على J • سنبين الآن أن $x \in C[a, b]$ وأن $x_m \rightarrow x$

نرى أنه عندما $n \rightarrow \infty$ في (٦) فان

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

لذا نجد المتباينة التالية أيا كان $t \in J$

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

وهذا يبين أن $(x_m(t))$ تتقارب من $x(t)$ بانتظام على J • ولما كانت الدوال x_m مستمرة على J وكان التقارب على J منتظما ، فإن دالة النهاية x مستمرة على J ، كما هو معروف (راجع المسألة ٩) • إذن فإن $x \in C[a, b]$ • وإذا لاحظنا أن $x \in C[a, b]$ فإثنا نكون قد برهننا على تمام الفضاء $C[a, b]$ •

لقد افترضنا هنا ، كما سبق وفعلنا في ١-١-٧ ، أن الدالة x حقيقية ، وذلك بقصد التبسيط • لذا يمكننا القول عن الفضاء $C[a, b]$ بأنه حقيقي • وبصورة مماثلة ، فإننا نجد الفضاء العقدي $C[a, b]$ إذا أخذنا الدوال العقدية المستمرة المعرفة على $[a, b] \subset \mathbb{R}$ • أن هذا الفضاء تام كذلك ، الأمر الذي يمكن التثبت منه بالطريقة نفسها تقريبا •

وفضلا عن ذلك ، فإن البرهان يبين صحة الحقيقة التالية :

١-٥-٦ مبرهنة (التقارب المنتظم)

ان التقارب $x_m \rightarrow x$ في الفضاء $C[a, b]$ هو تقارب منتظم ، أي أن المتتالية (x_m) تتقارب بانتظام على $[a, b]$ من x •
لذا فإن المترك على $C[a, b]$ يحدد تقاربا منتظما على $[a, b]$ ، ولهذا السبب فإنه يطلق على هذا المترك أحيانا اسم المترك المنتظم •
وللتوصل الى فهم جيد للتمام وللفاهيم أخرى ترتبط به ، فإننا سنورد في الختام بعض الأمثلة •

أمثلة على الفضاءات المترية غير التامة

١-٥-٧ الفضاء Q

وهو الفضاء المؤلف من مجموعة الأعداد جميعا Q المزودة بالمتركة المؤلف الحدد بالمساواة $d(x, y) = |x - y|$ ، حيث $x, y \in Q$ • يسمى هذا الفضاء الحور العادي Q وهو ليس تاما • (لماذا ؟)

٨-٥-١ الحدوديات

تكن X مجموعة كل الحدوديات التي نعتبرها دوال للمتغير t على مجال مغلق محدود $J=[a, b]$ ، ولنعرف متركا على X بالمساواة

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

ان هذا الفضاء (X, d) ليس تاما . وفي الحقيقة ، فان هذا يتضح اذا أخذنا متتالية لكوشي عناصرها حدوديات بحيث تكون متقاربة بانتظام على J من دالة مستمرة ليست حدوديا ، وبالتالي لا تنتمي الى X .

٩-٥-١ الدوال المستمرة

تكن X مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على $J=[0, 1]$ ، ولنفترض أن

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt.$$

سنثبت الآن أن هذا المترك غير تام .

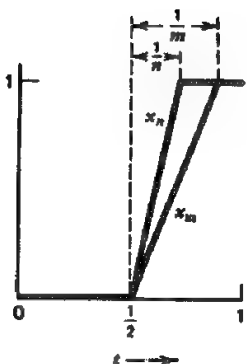
البرهان :

ان الدوال x_m في الشكل (٩) تشكل متتالية كوشي ، ذلك أن العدد $d(x_m, x_n)$ ليس سوى مساحة المثلث في الشكل (١٠) ، وأنه اذا كان ε عددا موجبا فان

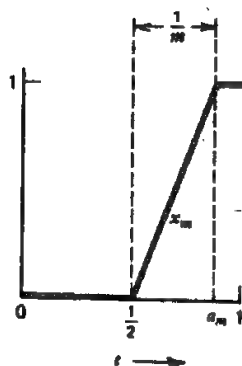
$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{عندما} \quad m, n > 1/\varepsilon$$

لنبين أن متوالية كوشي هذه ليست متقاربة . لدينا

$$x_m(t) = 0 \quad \text{عندما} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \quad , \quad x_m(t) = 1 \quad \text{عندما} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$$



الشكل ١٠



الشكل ٩

حيث $a_m = 1/2 + 1/m$ • لذا نجد أنه اذا كان x أي عنصر من X فان

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \int_0^1 |x_m(t) - x(t)| dt \\ &= \int_0^{1/2} |x(t)| dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)| dt + \int_{a_m}^1 |1 - x(t)| dt. \end{aligned}$$

ولما كانت الدالتان المكاملتان سالبتين ، فان كلا من التكاملات الواردة في الطرف الايمن يكون كذلك • وبالتالي فان $d(x_m, x) \rightarrow 0$ يقتضي أن يقترب كل من هذه التكاملات الى الصفر • وبما أن x مستمرة ، فيجب أن نجد

$$\bullet \quad x(t) = 0 \text{ عندما } t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ و } x(t) = 1 \text{ عندما } t \in (\frac{1}{2}, 1]$$

ولما كان هذا امرا غير ممكن بالنسبة لدالة مستمرة ، فان (x_m) ليست متقاربة ، أي أنه لا يوجد لها نهاية في X • وهذا يثبت أن X غير تام ■

مسائل

١ - ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث يكون $a < b$ • أثبت أن الفترة

المفتوحة (a, b) هي فضاء جزئي غير تام من \mathbb{R} ، في حين أن الفترة المغلقة $[a, b]$ تامة .

٢ - ليكن X فضاء كل المرتبات n من الاعداد الحقيقية $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ، ولنفترض أن

$$d(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|$$

حيث $y = (\eta_i)$. أثبت أن (X, d) فضاء تام .

٣ - ليكن M فضاء جزئيا من \mathbb{R} مؤلفا من كل المتتاليات $x = (\xi_i)$ التي حدود كل منها أصفار جميعا باستثناء عدد منته من هذه الحدود على الاكثر . أوجد متتالية لكوشي في M غير متقاربة في M ، الامر الذي يبين أن M غير تام .

٤ - أثبت أن الفضاء الجزئي M الوارد في المسألة ٣ غير تام ، وذلك بتطبيق البرهنة ١-٤-٧ .

٥ - أثبت أن مجموعة كل الاعداد الصحيحة X المزودة بالترك d المعروف بالمساواة $d(m, n) = |m - n|$ تشكل فضاء متريا تاما .

٦ - يبين أن مجموعة كل الاعداد الحقيقية المزودة بالترك d المحدد بالمساواة

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

تشكل فضاء متريا غير تام .

٧ - لتكن X مجموعة كل الاعداد الصحيحة الموجبة و $d(m, n) = |m^{-1} - n^{-1}|$. أثبت أن (X, d) فضاء غير تام .

٨ - (الفضاء $C[a, b]$) أثبت أن الفضاء الجزئي Y من $C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال $x \in C[a, b]$ المحققة للشرط $x(a) = x(b)$ هو فضاء غير تام .

٩ - لقد ذكرنا في ١-٥- البرهنة التالية التي ترد عادة في مبادئ التحليل

الرياضي : « إذا كان تقارب متتالية (x_n) من الدوال المستمرة المعرفة على $[a, b]$ تقارباً منتظماً على $[a, b]$ من الدالة x ، فإن دالة النهاية x هذه مستمرة على $[a, b]$ » برهن على صحة هذه النظرية .

١٠- (المتراكب المتقطع) . أثبت أن الفضاء المترى المتقطع (١-١-٨) هو فضاء تام .

١١- (الفضاء s) . أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \rightarrow x_n$ في الفضاء المترى s (١-٢-١) هو أن يكون $\xi_j^{(n)} \rightarrow \xi_j$ أي كان العدد الصحيح الموجب j ، وذلك بفرض أن $x_n = (\xi_j^{(n)})$ وأن $x = (\xi_j)$.

١٢- أفد من المسألة السابقة ١١ كي تثبت أن فضاء المتتاليات s في ١-٢-١ هو فضاء تام .

١٣- أثبت أنه إذا أخذنا الفضاء الوارد في ١-٥-٩ ، فإن المتتالية (x_n) حيث $x_n(i) = n$ عندما $0 \leq i \leq n-2$ ، $x_n(i) = i-1$ عندما $n-2 \leq i \leq 1$ هي متتالية لكوشي في هذا الفضاء .

١٤- بين أن متتالية كوشي الواردة في المسألة ١٣ غير متقاربة .

١٥- ليكن X الفضاء المترى المؤلف من كل المتتاليات الحقيقية $x = (\xi_i)$ التي حدود كل منها اصفار جميعاً باستثناء عدد منته من هذه الحدود على الأكثر ، بفرض أن $d(x, y) = \sum |\xi_i - \eta_i|$ حيث $y = (\eta_i)$. لاحظ أن هذا مجموع منته إلا أن عدد الحدود المجموعة يتعلق بـ x و y . أثبت أن المتتالية (x_n) حيث $\xi_j^{(n)} = j-2$ عندما $j = 1, \dots, n$ و $\xi_j^{(n)} = 0$ عندما $j > n$ هي متتالية كوشي ، وهذه المتتالية ليست متقاربة .

٦-١ اتمام الفضاءات المترية

من المعلوم أن المحور العادي Q غير تام (١-٥-٧) ، إلا أنه يمكن « توسيعه » إلى المحور الحقيقي R الذي هو فضاء تام ، بحيث أن هذا « الاتمام »

ل الى Σ يجري بصورة يكون فيها Σ كثيفا في Σ (١-٣٥) . ومن المهم جدا معرفة أن أي فضاء مترى غير تام يمكن « اتمامه » بصورة مماثلة ، الامر الذي سنراه الآن . واذا رغبنا في صياغة مناسبة ودقيقة لهذا « الاتمام » ، فاننا نورد تعريف المفهومين التاليين ، المرتبط أحدهما بالآخر ، واللذين لهما تطبيقات مختلفة أخرى .

١-٦-١ تعريف (التطبيق الايزومتري) (متساوي المسافة) ، الفضاءات الايزومترية (متساوية المسافة) .

ليكن $X = (X, d)$ و $\bar{X} = (\bar{X}, \bar{d})$ فضاءين مترين عندئذ :

(١) نقول عن تطبيق T للفضاء X في الفضاء \bar{X} انه **إيزومتري (متساوي المسافة)** اذا حافظ على T على المسافة ، بمعنى أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فان

$$\bar{d}(Tx, Ty) = d(x, y),$$

حيث Tx و Ty خيالا x و y على الترتيب .

(ب) نقول عن الفضاء X انه **إيزومتري (متساوي المسافة)** مع الفضاء \bar{X} ، اذا وجد تطبيق ايزومتري متباين وغامر من X على \bar{X} . وعندئذ نقول عن الفضاءين X و \bar{X} انهما **فضاءان ايزومتريان (متساويا المسافة)** . ■

لذا فالفضاءان الايزومتريان قد يختلفان على الاكثر بطبيعة عناصرهما ، بيد أنه لا يمكن تمييز أحدهما عن الآخر من وجهة نظر المترك . وبالتالي ، فانه يمكن اعتبار الفضاءين الايزومتريين متطابقين في أي دراسة لا تدخل في اعتبارها طبيعة عناصرهما ، وكان هذين الفضاءين نسختان من الفضاء « المطلق » نفسه .

بعد هذا يمكننا الآن صياغة واثبات المبرهنة التي تفيد بأن كل فضاء مترى يمكن اتمامه . ويدعى الفضاء الناتج \bar{X} في هذه المبرهنة **الاتمام** للفضاء المعطى X .

٢-٦-١ مبرهنة (الانتماء) • يوجد لكل فضاء متري $X=(X, d)$ فضاء متري تام $\bar{X}=(\bar{X}, \bar{d})$ يحوي فضاء جزئيا W ايزومتريا مع X وكثيفا في \bar{X} • ان هذا الفضاء \bar{X} وحيد اذا غصصنا الطرف عن الفضاءات الايزومترية معه ، بمعنى انه اذا كان \bar{X} اي فضاء متري تام يحوي فضاء جزئيا كثيفا \bar{W} ايزومتريا مع X ، فان الفضاءين \bar{X} و \bar{X} ايزومتريان •

البرهان :

ان البرهان مطول لكن مباشر ، وسنجزئه الى اربع خطوات على النحو التالي :

(أ) نجد الفضاء $\bar{X}=(\bar{X}, \bar{d})$ •

(ب) ننشئ تطبيقا ايزومتريا T لـ X على \bar{X} ، حيث $\bar{W}=T(X)$ •

ومن ثم نبرهن على

(ج) تمام الفضاء \bar{X} •

(د) وحدانية \bar{X} ، بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه •

وتتلخص مهمتنا تقريبا في تحديد نهايات مناسبة لمتتاليات لكوشي في \bar{X} بحيث تكون هذه المتتاليات غير متقاربة • هذا ، ولن نورد عددا « كبيرا جدا » من النهايات بل ندخل في اعتبارنا بأن هنالك متتاليات معينة « قد ترغب في التقارب من النهاية نفسها » لان حدود هذه المتتاليات « تقترب بصورة كيفية احدها من الآخر » •

ان هذه الفكرة الحدسية يمكن أن يعبر عنها رياضيا بدلالة علاقة تكافؤ مناسبة [انظر المساواة (1) في الاسفل] • ان هذا الامر ليس بالمصطنع ، ولكننا نستوحيه من عملية اتمام المحور العادي التي أتينا على ذكرها في بداية هذا البند • أما تفاصيل البرهان فهي كما يلي :

(أ) ايجاد الفضاء $\bar{X}=(\bar{X}, \bar{d})$ لتكن (x_n) و (x'_n) متتاليتين لكوشي في

X • سنقول ان (x_n) تكافئ (x'_n) ، ونكتب $(x_n) \sim (x'_n)$ اذا تحقق الشرط

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n') = 0.$$

لتكن \hat{x} مجموعة كل صفوف التكافؤ \hat{x} ، \hat{y} ، ... لمتاليات كوشي الناتجة .
 سنعني بكتابة $(x_n) \in \hat{x}$ أن (x_n) عنصر من \hat{x} (وهو ممثل للصف \hat{x}) .
 لنكتب الآن

$$(2) \quad d(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

حيث $(x_n) \in \hat{x}$ و $(y_n) \in \hat{y}$ ، وسنبين أن هذه النهاية موجودة . لدينا

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n);$$

لهذا فان

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

وبملاحظة أنه يمكننا الحصول على متباينة مماثلة بالمبادلة ما بين m و n ، فاننا نجد من هذه المتباينة والمتباينة (3) أن

$$(3) \quad |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$

ولما كانت (x_n) و (y_n) متاليتين لكوشي ، فمن الممكن جعل الطرف الايمن صغيرا بقدر ما نشاء ، الامر الذي يقتضي وجود النهاية (2) نظرا لكون الفضاء \mathbb{R} تاما .

يجب أيضا اثبات أن النهاية (2) مستقلة عن الاختيار الخاص للممثل . وفي الحقيقة ، فإذا كان $(x_n) \sim (x_n')$ و $(y_n) \sim (y_n')$ ، فاننا نجد اعتمادا على (1) أن

$$|d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leq d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n') \rightarrow 0$$

عندما $n \rightarrow \infty$ ، الامر الذي يقتضي أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y'_n).$$

سنبرهن أن d الوارد في (2) هو مترية على \hat{X} • من الواضح أن d يحقق الشرط (م) من البند ١-١ والشرط $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}) = 0$ والشرط (م) وبالإضافة إلى هذا فإن

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \implies (x_n) \sim (y_n) \implies \hat{x} = \hat{y}$$

وبذا يتحقق الشرط (م) بكامله • أما الشرط (م) فإنه ينتج من المتباينة

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

• عندما نجعل $n \rightarrow \infty$

(ب) إنشاء التطبيق الإيزومتري $T: X \rightarrow W \subset \hat{X}$ • لنقرن كل b من X بالصف \hat{b} من \hat{X} الذي يحوي متتالية كوشي الثابتة (b, b, \dots) • اننا بهذا نعرف تطبيقاً $T: X \rightarrow W$ على الفضاء الجزئي $W = T(X) \subset \hat{X}$ ، وهذا التطبيق هو $b \mapsto \hat{b} = Tb$ ، حيث $(b, b, \dots) \in \hat{b}$ • نرى أن T إيزومتري لأن (2) تغدو ببساطة كما يلي :

$$\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) = d(b, c);$$

و \hat{c} هنا هو صف (y_n) حيث $y_n = c$ أياً كان n • إن أي تطبيق إيزومتري متباين و $T: X \rightarrow W$ غامر لأن $T(X) = W$ • لذا فإن X و W إيزومتريان (راجع (ب) من التعريف ١-٦-١) •

سنبين أن W كثيف في \hat{X} • لنأخذ أي \hat{x} من \hat{X} ، ولنفترض أن $(x_n) \in \hat{x}$ • يوجد لكل عدد موجب ϵ عدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$d(x_n, x_N) < \frac{\epsilon}{2} \quad (n > N).$$

فإذا كان $(x_n, x_n, \dots) \in \mathcal{E}_N$ ، فإن $\mathcal{E}_N \in W$. فإذا لاحظنا أنه يترتب على (2) أن

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

فاننا نكون قد أثبتنا أن كل جوار ε للعنصر الاختياري \hat{x} و \hat{X} يحوي عنصرا من W الذي يعني أن W كثيف في \hat{X} .

(ج) تمام الفضاء \hat{X} . لتكن (\hat{x}_n) متتالية ما لكوشي في \hat{X} . لما كان W كثيفا في \hat{X} ، نانه يوجد لكل عنصر \hat{x}_n من W بحيث أن

$$(4) \quad \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_n) < \frac{1}{n}.$$

لذا فاننا نجد انطلاقا من متبينة المثلث أن

$$\begin{aligned} \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) &\leq \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_n) \\ &< \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

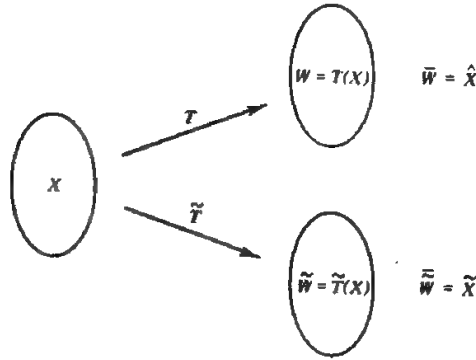
وهذا المقدار أصغر من أي عدد موجب ε عندما نأخذ m و n كبيرين بقدر كاف ، وذلك لكون (\hat{x}_m) متتالية كوشي . لذا فإن (\hat{x}_m) متتالية لكوشي . وبما أن $T: X \rightarrow W$ تطبيق ايزومتري ، وأن $\hat{x}_m \in W$ ، فإن المتتالية (z_m) ، حيث $z_m = T^{-1}\hat{x}_m$ هي متتالية كوشي في X . لنفترض أن \hat{x} من \hat{X} الصف الذي تنتمي اليه (z_m) ، ولنثبت أن \hat{x} هو نهاية (\hat{x}_n) . لدينا استنادا الى (4) ما يلي :

$$(5) \quad \begin{aligned} \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) &\leq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) \\ &< \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}). \end{aligned}$$

ولما كان $\hat{x} \in \hat{X}$ ($z_m \in X$) الامر الذي ذكرناه قبل قليل) وكان $\hat{x}_n \in W$ ، فإن $(z_n, z_n, z_n, \dots) \in \mathcal{E}_n$ ، وعندئذ تصبح المتبينة (5) على الشكل

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} d(z_n, z_m)$$

والطرف الايمن هنا أصغر من أي عدد موجب ε عند جعل n كبيرا بقدر كاف . وبالتالي فانه يوجد لمتتالية كوشي (\hat{x}_n) الاختيارية في \hat{X} النهاية \hat{x} في \hat{X} ، الامر الذي يترتب عليه تمام الفضاء \hat{X} .



الشكل (١١) . الرموز المستعملة في الخطوة (د) من اثبات البرهنة ١-٦-٢

(د) وحدانية \hat{X} ، بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه . اذا كان فضاء متريا تاما آخر يحوي فضاء جزئيا \tilde{W} كثيفا في \tilde{X} وايزومتريا مع X ، فانه يوجد لكل \tilde{x} و \tilde{y} من \tilde{X} متتاليتان (\tilde{x}_n) و (\tilde{y}_n) في \tilde{W} بحيث يكون $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$ و $\tilde{y}_n \rightarrow \tilde{y}$. لذا فان المساواة

$$\hat{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

تنتج من كون

$$|\hat{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \hat{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \leq \hat{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) + \hat{d}(\tilde{y}, \tilde{y}_n) \longrightarrow 0$$

[المتباينة هذه تشبه (3)] . ولما كان \tilde{W} ايزومتريا مع W المحتوى من \hat{X} ، وكان

$\bar{W} = \bar{X}$ ، فان المسافات على \bar{X} و \bar{X} يجب أن تكون واحدة ، وهذا يعني أن

الفضاءين \bar{X} و \bar{X} ايزومتريان •

وسنرى في الفصلين التاليين (وبخاصة في ٢-٣-٢ و ٣-١-٥ و ٣-٢-٣)
أن لهذه المبرهنة تطبيقات أساسية على فضاءات منفردة غير تامة ولصفوف كاملة
من مثل هذه الفضاءات •

مسائل

١ — بين أنه اذا كان فضاء جزئي Y من فضاء متري مؤلفا من عدد منته من
النقاط ، فان Y تام •

٢ — ما هو الاتمام للفضاء (X, d) ، حيث X هي مجموعة كل الاعداد العادية
و $d(x, y) = |x - y|$ ؟

٣ — ما هو الاتمام لفضاء متري متقطع X ؟ (راجع ١-١-٨) •

٤ — اذا كان X_1 و X_2 ايزومتريين وكان X_1 تاما ، فأثبت أن X_2 تام •

٥ — (الهوميومورفيزم أو التماثل) الهوميومورفيزم هو تطبيق مستمر
متباين وغامر $T: X \rightarrow Y$ كما أن عكسه مستمر • ويقال عندئذ عن
الفضاءين المتريين X و Y انها هوميومورفيان • (أ) أثبت أنه اذا كان X و Y
ايزومتريين ، فانها هوميومورفيان • (ب) بين بايراد أحد الامثلة أن الفضاء
المتري التام والفضاء المتري غير التام قد يكونا هوميومورفيين •

٦ — أثبت أن الفضاءين $C[0, 1]$ و $C[a, b]$ ايزومتريان •

٧ — اذا كان (X, d) فضاء تاما ، فبرهن على أن الفضاء (X, \bar{d}) ، حيث
 $\bar{d} = d/(1+d)$ ، فضاء تام كذلك •

٨ — أثبت أنه اذا كان الفضاء (X, \bar{d}) في المسألة ٧ تاما ، فان (X, d) فضاء تام
كذلك •

٩ - بين أنه إذا كانت (x_n) و (x'_n) متتاليتين في (X, d) بحيث يتحقق الشرط (1) والشرط 1 ، فإن $x_n \rightarrow x$ ، فان (x'_n) تكون متقاربة ، كما تكون نهايتها 1 .

١٠ - إذا كانت (x_n) و (x'_n) متتاليتين متقاربتين في فضاء متري (X, d) ، وكان لهما نهاية واحدة 1 ، فأثبت عندئذ أنهما يحققان (1) .

١١ - برهن على أن (1) يعرف علاقة تكافؤ على مجموعة كل متتاليات كوشي التي عناصرها في X .

١٢ - إذا كانت (x_n) متتالية لكوشي في (X, d) ، وكانت (x'_n) متتالية في X تحقق (1) ، فأثبت أن (x'_n) تكون عندئذ متتالية لكوشي في X .

١٣ - (شبه المترك) يعرف شبه المترك المنتهي على مجموعة X بأنه دالة $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ تحقق الشروط (1م) و (3م) و (4م) من البند ١-١ والشرط

$$d(x, x) = 0.$$

ما الفرق بين مترك وشبه مترك ؟ بين أن المساواة $d(x, y) = |\xi_1 - \eta_1|$ تعرف شبه مترك على مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية حيث $x = (\xi_1, \xi_2)$ و $y = (\eta_1, \eta_2)$. (تجدر بنا الإشارة إلى أن بعض المؤلفين يستعملون مصطلح نصف مترك بدلا من شبه مترك) .

١٤ - هل تعرف المساواة

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

متركا أو شبه مترك على X في كل الحالات التالية : (أ) X هي مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ ، (ب) X هي مجموعة كل الدوال الحقيقية والكمولة ريمانيا على $[a, b]$ ؟

١٥- إذا كان (X, d) فضاء شبه ممتري ، فإننا ندعو المجموعة

$$B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} \quad (r > 0)$$

كرة مفتوحة في X مركزها x_0 ونصف قطرها r . (لاحظ الشبه بين هذا التعريف والتعريف ١-٣-١) • حدد الكرات المفتوحة التي نصف قطرها 1 في المسألة ١٣ •

* * *

الفصل الثاني

الفضاءات المنظمة • فضاءات باناخ

من الممكن الحصول على فضاءات مترية مفيدة وذات أهمية خاصة اذا أخذنا الفضاء المتجهي وعرفنا عليها متركبا بواسطة تنظيم ، وعندها يسمى الفضاء الناتج **فضاء منظما** . واذا كان هذا الفضاء فضاء متريا تاما ، فانه يدعى **فضاء باناخ** . ان نظرية الفضاءات المنظمة ، وبخاصة فضاءات باناخ ، ونظرية المؤثرات الخطية المعرفة عليها هي الاكثر تطورا بين أقسام التحليل الدالي . وهذا الفصل مكرس لدراسة الافكار الاساسية في هذه النظريات .

مفاهيم هامة • توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

الفضاء المنظم (١-٢-٢) هو فضاء متجهي (١-١-٢) معرف عليه متركب بواسطة تنظيم (١-٢-٢) ، والتنظيم هو تعميم لطول متجه في المستوي أو في الفضاء ثلاثي البعد . و **فضاء باناخ** (١-٢-٢) فضاء منظم يشكل فضاء متريا تاما . ويوجد للفضاء المنظم اتمام هو فضاء باناخ (٢-٣-٢) . ويمكننا أيضا في الفضاء المنظم أن نعرف ونستعمل المتسلسلات غير المنتهية (٣-٢) .

يسمى كل تطبيق من فضاء منظم X الى فضاء منظم Y **مؤثرا** ، كما يسمى التطبيق من X الى الحقل العددي R أو C **داليا** . وللمؤثرات المسماة **مؤثرات خطية محدودة** ، كما وللداليات المسماة **داليات خطية محدودة** ، أهمية

خاصة ، ذلك أنها جميعا مستمرة وتستثمر البنية الجبرية للفضاء المتجهي . وفي الحقيقة ، فإن المبرهنة ٢-٧-٩ تنص على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي مستمرا هو أن يكون محدودا ، وهذه نتيجة أساسية . ان أهمية الفضاءات المتجهية هنا تعود بصورة رئيسية الى المؤثرات الخطية والداليات الخطية التي تحملها هذه الفضاءات .

ومن الامور الاساسية أن مجموعة كل المؤثرات الخطية المحدودة من فضاء منظم معطى X الى فضاء معطى آخر Y يمكن جعلها فضاء منظما (٢-١٠-١) يرمز له بـ $B(X, Y)$. كذلك فان مجموعة كل الداليات الخطية المحدودة على X تصبح فضاء منظما يسمى الفضاء الثنوي X' للفضاء X (٢-١٠-٣) .

ان الفضاءات المنظمة غير منتهية الابعاد أكثر أهمية من الفضاءات منتهية الابعاد . والفضاءات الاخيرة أبسط من سابقتها (٢-٤ و ٢-٥) ، كما أن المؤثرات المعرفة عليها يمكن أن تمثل بمصفوفات (٢-٩) .

ملاحظة حول الرموز

سنرمز للفضاءين X و Y ، وللمؤثرات بأحرف لاتينية كبيرة (ويفضل الحرف T) ، ولصورة عنصر x وفق T بـ Tx (دون قوسين) ، وللداليات بأحرف لاتينية صغيرة (ويفضل الحرف f) ، ولقيمة f في نقطة x بـ $f(x)$ (بقوسين) . وهذه الرموز تستعمل بصورة واسعة .

١-٢ الفضاء المتجهي

تشغل الفضاءات المتجهية مركزا مرموقا في العديد من فروع العلوم الرياضية وتطبيقاتها . وفي الحقيقة ، فاننا نستعمل في كثير من المسائل التطبيقية (والنظرية) مجموعة X قد تكون عناصرها متجهات في فضاء ثلاثي البعد أو دوال أو متتاليات عديدة ، وهذه العناصر يمكن جمعها أو ضربها بثوابت (عددية) بطريقة طبيعية ، حيث تكون النتيجة عنصرا من X كذلك . ان مثل هذه الحالات توحى بمفهوم الفضاء المتجهي الذي سنعرفه في الفقرة التالية . وسيحوي التعريف حقلا عاما K ،

الا أن هذا الحقل يؤخذ في التحليل الدالي إما \mathbb{R} واما \mathbb{C} وتسمى عناصر K مقادير عددية ، وبالتالي فانها في حالتنا هذه أعداد حقيقية أو أعداد عقدية .

١-١-٢ تعريف (الفضاء المتجهي)

الفضاء المتجهي (أو الفضاء الخطي) على حقل K هو مجموعة غير خالية X من العناصر x و y و z (تدعى متجهات) . وهذه المجموعة مزودة بعمليتين جبريتين • تدعى هاتان العمليتان جمعا متجهيا وضرب متجهات بأعداد ، أي بعناصر من K •

ان الجمع المتجهي يقرن بكل زوج مرتب (x, y) من المتجهات متجها $x+y$ يدعى مجموع x و y بحيث يكون هذا الجمع تبادليا وتجميعيا ، أي بحيث تتحقق المساواتان

$$x+y=y+x$$

$$x+(y+z)=(x+y)+z;$$

أيأ كانت المتجهات x و y و z • كذلك يجب أن يوجد متجه 0 يدعى المتجه الصفري ، وأن يوجد لكل متجه x متجه $-x$ بحيث تتحقق المساواتان

$$x+0=x$$

$$x+(-x)=0.$$

• أيأ كان المتجه x

أما ضرب المتجه بعدد ، فيقرن بكل متجه x متجها αx (يرمز له أيضا بـ αx) ويدعى جداء α و x بحيث تتحقق المساواتان

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

$$1x=x$$

وبحيث يصح القانونان التوزيعيان

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

• أيا كان المتجهان x و y وأيما كان العددان α و β

نرى من التعريف أن الجمع المتجه هو تطبيق $X \times X \rightarrow X$ ، في حين أن

الضرب بعدد هو تطبيق $K \times X \rightarrow X$

يسمى K الحقل العددي (أو حقل المعاملات) للفضاء المتجهي X ، كما يسمى X الفضاء المتجهي الحقيقي إذا كان $K = \mathbb{R}$ (هو حقل الأعداد الحقيقية) ، أو الفضاء المتجهي العقدي إذا كان $K = \mathbb{C}$ (هو حقل الأعداد العقدية) .

إن استعمالنا للرمز 0 للدلالة على العدد 0 وعلى الشعاع الصفري في آن واحد ، يجب أن لا يؤدي إلى إرباك في الحالة العامة . وإذا رغبتنا في وضوح أكبر ، فيمكننا أن نرمز للصفري المتجه بـ θ .

ونترك للقارئ البرهان على صحة ما يلي أيا كان المتجه x وأيما كان العدد α

$$(1a) \quad 0x = \theta$$

$$(1b) \quad \alpha\theta = \theta$$

and

$$(2) \quad (-1)x = -x.$$

أمثلة

٢-١-٢ الفضاء \mathbb{R}^n

هذا الفضاء هو الفضاء الإقليدي الذي أوردناه في ١-١-٥ . وهو مؤلف من مجموعة كل المرتبات n من الأعداد الحقيقية مثل $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ، $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ، الخ . وهذه المجموعة مزودة بالعمليتين الجبريتين المعرفتين بالطريقة المألوفة التالية

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

من الواضح أن هذا الفضاء هو فضاء خطي حقيقي .
والأمثلة التالية هي من طبيعة مماثلة ، ذلك أننا في كل منها سنعرف فضاء متجهيا انطلاقا من فضاء سبق ورأيناه .

٢-١-٢ الفضاء \mathbb{C}^n

لقد عرفنا هذا الفضاء في ١-١-٥ ، وهو مؤلف من مجموعة كل المرتبات من الأعداد العقدية مثل $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ، الخ ، حيث تعرف العمليتان الجبريتان على هذه المجموعة كما فعلنا في المثال السابق ، إلا أننا نفترض هنا أن $\alpha \in \mathbb{C}$.

٢-١-٢ الفضاء $C[a, b]$

لقد سبق وعرفنا هذا الفضاء في ١-١-٧ . أن كل نقطة من هذا الفضاء هي دالة حقيقية مستمرة على $[a, b]$. أن مجموعة كل هذه الدوال تشكل فضاء متجهيا حقيقيا لدى تزويدها بعمليتين جبريتين معرفتين على النحو التالي

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

وفي الحقيقة ، فإن $x + y$ و αx هما دالتان حقيقتان مستمرتان معرفتان على $[a, b]$ عندما تكون x و y دالتين حقيقتين ويكون α عددا حقيقيا .

من فضاءات الدوال المتجهة الهامة الأخرى نورد (أ) الفضاء المتجهي $B(A)$ في ٢-٢-١ ب (ب) الفضاء المتجهي لكل الدوال الفضولة على \mathbb{R} ، (ج) الفضاء المتجهي لكل الدوال الحقيقية على $[a, b]$ والكمولة ريمانيا أو بمعنى آخر .

أوردنا هذا الفضاء في ٢-١-٣ ، وهو فضاء متجهي عمليته الجبريتان معرفتان بالطريقة التالية

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) + (\eta_1, \eta_2, \dots) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots)$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots).$$

وفي الحقيقة ، فإذا كان $x = (\xi_i) \in I^2$ و $y = (\eta_i) \in I^2$ ، فإن $x + y \in I^2$ ، الامر الذي ينتج مباشرة من متبينة مينكوفسكي (12) في البند ٢-١-٢ . كذلك من الواضح أن $\alpha x \in I^2$.

من الفضاءات الاخرى التي نقاطها متتاليات الفضاء I^p الوارد في ٢-١-٣ ، حيث $1 \leq p < +\infty$ ، والفضاء I الوارد في ٢-١-١ ،

الفضاء الجزئي من فضاء متجهي X هو مجموعة جزئية غير خالية Y من X بحيث نجد أنه أيا كان $y_1, y_2 \in Y$ وأيا كان العددين α و β ، فإن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$.
 لذا فإن Y نفسه هو فضاء متجهي عمليته هما مقصورا العمليتين المعرفتين على X .
 من الفضاءات الجزئية الخاصة من X هو الفضاء الجزئي غير الفعلي $Y = X$.
 وكل فضاء جزئي آخر من X ($\neq \{0\}$) يسمى فضاء جزئيا فعليا .

كذلك ، فهناك فضاء جزئي خاص آخر من أي فضاء متجهي X هو $Y = \{0\}$.
 يعرف التركيب الخطي للمتجهات x_1, \dots, x_m من الفضاء المتجهي X بأنه عبارة من الشكل

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$$

حيث تمثل المعاملات $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ أي أعداد .

وإذا كانت M أي مجموعة جزئية غير خالية من X ، فإن مجموعة كل التراكيب الخطية لمتجهات M تسمى متوكداً M ، ونرمز لها بالشكل

$$\text{span } M.$$

ومن الواضح أن هذا فضاء جزئي X من Y ، وعندئذ نقول بأن Y مولد بالمجموعة M .

سنقدم الآن مفهومين هامين مرتبط أحدهما بالآخر . وسنستعمل هذين المفهومين مرارا وتكرارا في أبحاثنا القادمة .

٢-١-٦ تعريف (الاستقلال الخطي ، الارتباط الخطي)

يعرف الاستقلال والارتباط الخطي لمجموعة M من المتجهات x_1, \dots, x_r ($r \geq 1$) في فضاء متجهي X عن طريق المعادلة

$$(3) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0,$$

حيث $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ أعداد . من الواضح أن المعادلة (3) صحيحة عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$. فإذا كانت هذه هي الأعداد الوحيدة التي تتحقق من أجلها المعادلة (3) ، فإننا نقول إن المجموعة M مستقلة خطيا . وإذا لم تكن M مستقلة خطيا قلنا إنها مرتبطة خطيا ، أي أن M تكون مرتبطة خطيا إذا كانت (3) محققة من أجل مجموعة $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ من الأعداد ليست جميعها أصفارا .

ونقول عن مجموعة جزئية ما M من X إنها مستقلة خطيا إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتية في M مستقلة خطيا . ويقال عن M إنها مرتبطة خطيا إذا لم تكن M مستقلة خطيا . ■

إن ما يدعونا ليراد هذه المصطلحات ينبع من حقيقة أنه إذا كانت $M = \{x_1, \dots, x_r\}$ مرتبطة خطيا ، فإن واحدا على الأقل من متجهات M يمكن أن يكتب على شكل تركيب خطي للمتجهات الأخرى . فمثلا ، إذا تحققت (3) وكان $\alpha_r \neq 0$ ، فإن M مرتبطة خطيا . ويمكن عندئذ حل (3) بالنسبة إلى x_r ونجد

$$x_r = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{r-1} x_{r-1} \quad (\beta_i = -\alpha_i / \alpha_r).$$

هذا ويمكن توليف مفهومي الاستقلال والارتباط الخطي في تعريف بعد الفضاء المتجهي انطلاقا من التعريف التالي .

٧-١-٢ تعريف (الفضاءات المتجهة منتهية البعد وغير منتهية البعد)

نقول عن فضاء متجهي X انه منتهي البعد اذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث تحوي X جملة مستقلة خطيا من n من المتجهات في حين أن أي $n+1$ من المتجهات في X تكون مرتبطة خطيا . عندئذ يدعى n بعد X ، ونكتب $n = \dim X$. ونقول عن الفضاء $X = \{0\}$ بأنه منته وبعدة $\dim X = 0$. واذا لم يكن X منتهي البعد ، فاننا نقول بأنه غير منتهي البعد . ■

ان الفضاءات غير منتهية البعد أهم في علم التحليل الرياضي من الفضاءات منتهية البعد . وعلى سبيل المثال ، فإن $C[a, b]$ و l^2 غير منتهية البعد ، في حين أن \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n منتهية البعد ، وبعد كل منهما n .

اذا كان $\dim X = n$ ، فإن كل مرتبة n من المتجهات المستقلة خطيا في X تدعى قاعدة للفضاء X (أو قاعدة في X) . واذا كانت $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X ، فانه يوجد لكل عنصر x من X تمثيل وحيد على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة :

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

وعلى سبيل المثال ، فإن المتجهات التالية تشكل قاعدة لـ \mathbb{R}^n

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

وتدعى هذه القاعدة أحيانا القاعدة القانونية لـ \mathbb{R}^n .

وبصورة أهم ، فاذا كان X أي فضاء متجهي ، ليس منتهي البعد بالضرورة ، وكانت B مجموعة جزئية مستقلة خطيا في X وتولد X ، فإن B تدعى قاعدة (أو قاعدة هامل) لـ X . وبالتالي فاذا كانت B قاعدة لـ X ، فإن لكل متجه

غير صفري x من X تمثيلا وحيدا على شكل تركيب خطي لعناصر (تؤلف مجموعة منتهية) من B وحيث تكون المعاملات أعداد غير صفرية معا .

سنبين الآن بأنه يوجد لكل فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ قاعدة .

ان صحة هذه الدعوى واضحة للبيان في حال الفضاءات منتهية البعد . أما في حال الفضاءات المتجهية غير منتهية البعد ، فان اثبات وجود القاعدة يستند الى تمهيدية زورن ، وسنقدم هذا الاثبات فيما بعد . وتمهيدية زورن المذكورة تحوي مفاهيم عديدة سنشرحها بعد فترة من الزمن ، ذلك أننا الآن سندرس أشياء أخرى تهمنا أكثر . لذا سنرجى اثبات الوجود المذكور الى حين سردنا للبند ٤-١ ، حيث نورد تمهيدية زورن لغرض آخر .

ومن الجدير بالذكر أن لقواعد فضاء متجهي معطى X (منتهي البعد أو غير منتهي البعد) عددا أصليا واحدا . (ويلزم للبرهان على هذا أدوات أكثر تقدما من نظرية المجموعات . راجع الصفحة الثالثة من كتاب M. M. Day المنشور عام ١٩٧٣م) ويدعى هذا العدد بعدد الفضاء X . لاحظ أن هذا يحوي ويوسع التعريف ٢-١-٧ .

٢-١-٨ مبرهنة (بعد الفضاء الجزئي) .

إذا كان X فضاء متجهيا بعده n ، فان لكل فضاء جزئي فعلي Y من X بعدا اصغر من n .

البرهان :

إذا كان $n=0$ فان $X=\{0\}$ ، وليس لهذا الفضاء فضاء جزئي فعلي . وإذا كان $\dim Y=0$ ، فان $Y=\{0\}$ ، وبالتالي $X \neq Y$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون $\dim X \geq 1$ ، وواضح أن $\dim Y \leq \dim X = n$. أما إذا كان $\dim Y = n$ ، فانه يوجد لـ Y قاعدة مؤلفة من عناصر عددها n ، وهذه القاعدة لابد أن تكون قاعدة للفضاء X نظرا لان $\dim X = n$ ، وبالتالي يكون $X = Y$. يبين هذا أن أي مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات في Y يجب أن تحوي من العناصر عددا أقل من n ، أي أن $\dim Y < n$. ■

مسائل

١ - أثبت أن مجموعة كل الأعداد الحقيقية ، المزودة بعمليات الجمع والضرب المألوفتين ، تشكل فضاء متجهيا حقيقيا وحيد البعد ، وأن مجموعة كل الأعداد العقدية تشكل فضاء متجهيا عقديا وحيد البعد .

٢ - أثبت صحة (1) و (2) .

٣ - حدد $\text{span } M$ للمجموعة $M = \{(1, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ في \mathbb{R}^3 .

٤ - حدد من بين المجموعات الجزئية التالية من \mathbb{R}^3 ما كان منها مشكلا لفضاء جزئي من \mathbb{R}^3 .

[نفترض هنا أن $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$]

- (أ) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1 = \xi_2$ ، $\xi_3 = 0$.
- (ب) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1 = \xi_2 + 1$.
- (ج) مجموعة كل العناصر x حيث ξ_1, ξ_2, ξ_3 أعداد موجبة .
- (د) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = k$ (k ثابت) .

٥ - بين أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ ، حيث $x_i(t) = t^i$ ، تشكل مجموعة مستقلة خطيا في الفضاء $C[a, b]$.

٦ - أثبت أنه إذا كان X أي فضاء متجهي بعده n ، فإن تمثيل أي x على شكل تركيب خطي لمتجهات قاعدة معطاة e_1, \dots, e_n هو تمثيل وحيد .

٧ - لتكن $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لفضاء متجهي عقدي X . أوجد قاعدة في X باعتباره فضاء متجهيا حقيقيا . عين بعد X في كل من الحالتين .

٨ - إذا كانت M مجموعة مرتبطة خطيا في فضاء متجهي عقدي X ، فهل من الضروري أن تكون M مرتبطة خطيا في X باعتباره فضاء متجهيا حقيقيا ؟

٩ - لتأخذ الفترة المثبتة $[a, b]$ في \mathbb{R} ، ولننظر في المجموعة X المؤلفة من كل الحدوديات ذات المعاملات الحقيقية والتي لا تزيد درجة كل منها عن عدد معطى n ، ومن الحدودي $x=0$ (الذي لا تعرف درجة له وفق التعريف

المألوف للدرجة) . أثبت أن المجموعة X المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقيي المألوفتين تشكل فضاء متجهيا حقيقيا بعده $n+1$. أوجد قاعدة لـ X ، ثم بين أنه يمكن الحصول على فضاء متجهي عقدي \bar{X} بطريقة ماثلة وذلك لدى جعل المعاملات في الحدوديات عقدية . هل X فضاء جزئي من \bar{X} ؟

١٠- إذا كان Y و Z فضاءين جزئيين من فضاء متجهي X ، فبين أن $Y \cap Z$ فضاء جزئي من X ، في حين أن $Y \cup Z$ ليس بالضرورة كذلك . اعط أمثلة على ذلك .

١١- إذا كانت $M \neq \emptyset$ أي مجموعة جزئية من فضاء متجهي X ، فبين أن $\text{span } M$ فضاء جزئي من X .

١٢- بين أن مجموعة كل المصفوفات المربعة المؤلفة من سطرين تشكل فضاء متجهيا . ما هو المتجه الصفري في X ؟ حدد $\dim X$ ، ثم أوجد قاعدة في X . أورد أمثلة على فضاءات جزئية من X . هل تشكل المصفوفات المتناظرة $x \in X$ فضاء جزئيا ؟ وهل تشكل المصفوفات الشاذة فضاء جزئيا أيضا ؟

١٣- (الجداء) أثبت أن الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2$ لفضاءين متجهيين على حقل واحد يغدو فضاء متجهيا ان نحن عرفنا العمليتين الجبريتين كما يلي :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

١٤- (فضاء حاصل القسمة ، البعد المرافق) ليكن Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X . يرمز الى المجموعة المشاركة لعنصر x من X بالنسبة الى Y بالشكل $x + Y$ ، وتعرف هذه على أنها المجموعة (انظر الى الشكل ١٢) .

$$x + Y = \{v \mid v = x + y, y \in Y\}.$$

بين أن المجموعات المشاركة المختلفة تشكل تجزئة لـ X . ثم بين أنه اذا عرفنا عمليتين جبريتين بالمساواتين (انظر الى الشكلين ١٣ و ١٤) .

$$(w + Y) + (x + Y) = (w + x) + Y$$

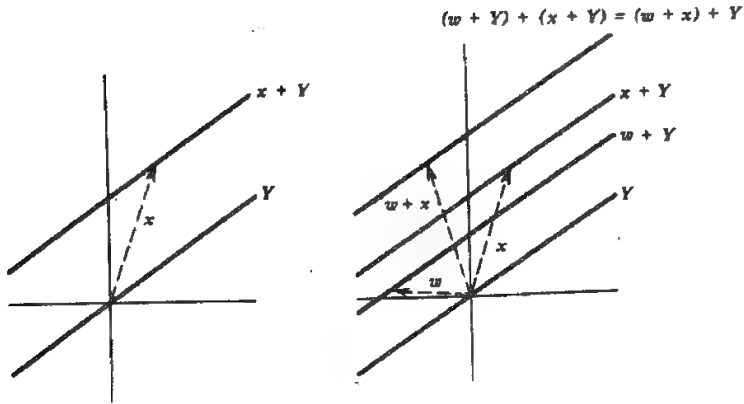
$$\alpha(x + Y) = \alpha x + Y$$

فإن هذه المجموعات المرافقة تؤلف عناصر فضاء متجهي . يسمى هذا الفضاء فضاء حاصل قسمة (وأحيانا فضاء عامل) X على Y ، ويرمز له بـ X/Y . ويدعى بعده البعد التكملي لـ Y ، ويرمز له بـ $\text{codim } Y$ ، أي أن

$$\text{codim } Y = \dim (X/Y).$$

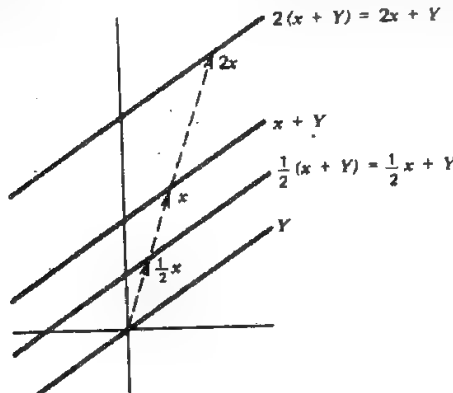
١٥- ليكن $X = \mathbb{R}^3$ و $Y = \{\xi_1, 0, 0\} | \xi_1 \in \mathbb{R}\}$. حدد كلا من الفضاءات X/Y و

$$X/X \text{ و } X/\{0\}$$



الشكل (١٢). إيضاح الرمز $x+Y$ في المسألة ١٤

الشكل (١٣). إيضاح جمع التجهات في فضاء حاصل القسمة (المسألة ١٤)



الشكل (١٤). إيضاح عملية الضرب بعدد في فضاء حاصل القسمة (المسألة ١٤)

٢-٢ الفضاء المنظم • فضاء باناخ

ان الامثلة التي سقناها في البند السابق تبين أن الفضاء المتجهي قد يكون في كثير من الاحوال فضاء متريا في الوقت ذاته وذلك لان متركا d قد عرف على X • بيد أن عدم وجود رابطة بين البنية الجبرية والمترك يجعلنا لا نتوقع نظرية مفيدة وذات تطبيقات عملية تربط ما بين المفاهيم الجبرية والمترية • ولضمان مثل هذه الرابطة بين الخواص « الجبرية » و « الهندسية » لـ X ، فإننا نعرف على X متركا d بطريقة خاصة على النحو التالي : ندخل أولا مفهوما مساعدا ، هو التنظيم (الذي نعرفه بعد قليل) بحيث نستعمل في هذا التعريف العمليتين الجبريتين للفضاء المتجهي ، ومن ثم نوظف التنظيم في سبيل الحصول على مترك d • ان هذه الفكرة تقود الى مفهوم الفضاءات المنظمة. وقد وجد أن هذه الفضاءات هي خاصة لدرجة تمكننا من ارساء قاعدة لنظرية هامة وواسعة ومستقلة ، ولكنها في الوقت ذاته عامة لدرجة أنها تحوي أنماطا عديدة من فضاءات ذات اهمية تطبيقية • وفي الواقع ، فإن عددا كبيرا من الفضاءات المترية في التحليل الرياضي يمكن اعتبارها على أنها فضاءات منظمة ، الامر الذي يهيب بنا الى القول بأن الفضاءات المنظمة ربما كانت من أهم أنواع الفضاءات في التحليل الدالي ، على الاقل من وجهة نظر التطبيقات المعاصرة • وسنورد فيما يلي التعاريف :

١-٢-٢ تعريف (الفضاء المنظم ، فضاء باناخ) •

الفضاء المنظم (*) X هو فضاء متجهي مزود بتنظيم • اما فضاء باناخ فهو فضاء منظم تام (بالنسبة للمترك المحدد بالتنظيم ، كما سنرى في (1) بعد قليل) • والتنظيم على فضاء متجهي (حقيقي أو عقدي) هو دالة حقيقية على X يرمز

(*) يسمى هذا الفضاء ايضا **الفضاء المتجهي المنظم او الفضاء الخطي المنظم** • وقد اورد هذا التعريف (بصورة مستقلة) كل من باناخ (عام ١٩٢٢ م) وهان (عام ١٩٢٢ م) وفيينر (عام ١٩٢٢ م) • وقد تطورت النظرية بسرعة ، الامر الذي يمكن رؤيته من كتاب باناخ (١٩٣٢) الذي لم ينشر الا بعد ١٠ سنوات •

لقيمتها في نقطة x من X بالشكل

$$\|x\|$$

(و يقرأ « نظيم x »). بحيث تتحقق الخواص التالية :

$$\|x\| \geq 0 \quad (1)$$

$$\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (2)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (3)$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{متباينة المثلث}) \quad (4)$$

ويمثل x و y هنا متجهين كفيين في X ، أما α فتمثل عددا ما .

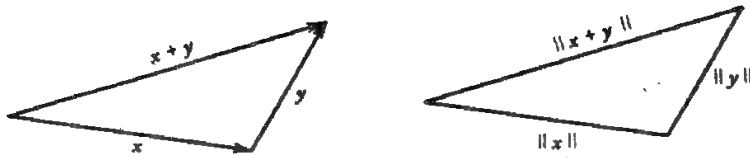
ويحدد النظيم على X متركا d على X وفق المساواة

$$(1) \quad d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

يسمى هذا المترك المترك المولد بالنظيم . يرمز للفضاء المترى الذي عرفناه توءا بالشكل $(X, \|\cdot\|)$ أو بـ X فقط . ■

ان الدافع لادراج الخواص (1) - (4) التي تعرف النظيم ينطلق من الطول $|x|$ لمتجه x الذي قابلناه في جبر المتجهات الابتدائي ، وبالتالي فيمكننا أن نكتب في هذه الحالة $\|x\| = |x|$. وفي الحقيقة ، فان الخاصتين (1) و (2) تنضان على أن لكل المتجهات أطوالا موجبة ، عدا المتجه الصفري الذي يساوي طوله الصفر . أما الخاصة (3) فتعني أنه لدى ضرب متجه بعدد ، فان طول المتجه يضرب بالقيمة المطلقة للعدد . وأما الخاصة (4) ، التي أوضحناها بالشكل (15) ، فانها تعني أن طول ضلع في مثلث لا يمكن أن يتجاوز مجموع طوليه ضلعيه الآخرين .

هذا ، وليس من الصعب أن نستنتج من (1) - (4) أن (1) تحدد متركا . لذا فان الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ هي فضاءات مترية .



الشكل (١٥) • ايضاح متباينة المثلث (٤)

وتكمن أهمية فضاءات باناخ في أنها تتمتع بخواص معينة (سنوردها في الفصل الرابع) لا تسري على الفضاءات المنظمة غير التامة •

هذا ومن الممكن ملاحظة أن الخاصة (ن٤) تقتضي الدستور

$$(2) \quad ||y|| - ||x|| \leq ||y - x||,$$

الامر الذي يمكن استخلاصه بيسر (راجع المسألة ٣) • ويترتب على المتباينة (2) الخاصة الهامة التالية للنظيم :

النظيم هو تطبيق مستمر ، اي أن $x \mapsto ||x||$ هو تطبيق مستمر للفضاء $(X, ||\cdot||)$ في R • (١-٢-٣) •

من النماذج الابتدائية للفضاءات المنظمة الفضاءات المألوفة لكل المتجهات في المستوي وفي الفضاء ثلاثي البعد • ونجد أمثلة أخرى انطلاقاً من البند ١-١ والبند ٢-١ ، لان بعض الفضاءات المترية في هذين البندين يمكن جعلها فضاءات منظمة بصورة طبيعية • ومع ذلك ، فسنين في مكان آخر من هذا البند أن ليس كل مترك على فضاء متجهي يمكن ان يولد من تنظيم •

أمثلة

٢-٢-٢ الفضاء الاقليدي R^n والفضاء الوحدوي C^n

لقد سبق وعرفنا هذين الفضاءين في ١-١-٥ • انهما فضاءا باناخ حيث

النظيم معرف بالمساواة

$$(3) \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2}.$$

وفي الحقيقة فإن \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n تامان (١-٥-١) ، كما أن (3) يولد المترك (7) في البند ١-١ :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

ونلاحظ بوجه خاص أنه في حالة \mathbb{R}^3 يكون

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

وهذا يؤكد ملاحظتنا السابقة بأن النظيم يعمم الفكرة الابتدائية لطول المتجه $|x|$ •

٢-٢-٢ الفضاء l^p

لقد عرف هذا الفضاء في ٣-٢-١ • انه فضاء باناخ حيث النظيم

$$(4) \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p}$$

وسبب ذلك يعود الى أن هذا النظيم يولد المترك التالي (الذي ورد في ٣-٢-١)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p}$$

أما تمام هذا الفضاء فيناه في ٤-٥-١ •

٢-٢-٤ الفضاء l^{∞}

سبق وعرفنا هذا الفضاء في ١-١-٦ ، وهو فضاء باناخ لان المترك هنا مولد من التنظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_j |x_j|$$

أما تمام هذا الفضاء فسبق وبيناه في ١-٥-٢

٢-٢-٥ الفضاء $C[a, b]$

لقد عرفنا هذا الفضاء في ١-١-٧ ، وهو فضاء باناخ حيث التنظيم معطى بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \quad (5)$$

وحيث $J = [a, b]$ • أما تمام هذا الفضاء فسبق واثبتناه في ١-٥-٥ •

٢-٢-٦ الفضاءات المنتظمة غير التامة

يمكن انطلاقا من الفضاءات المترية غير التامة في ١-٥-٧ و ١-٥-٨ أن نحصل مباشرة على فضاءات منتظمة غير تامة • وعلى سبيل المثال ، فان المترك في ١-٥-٩ مولد من التنظيم المحدد بالمساواة

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt. \quad (6)$$

هل يمكن اتمام كل فضاء منظم غير تام ؟ لقد رأينا في ١-٦-٢ أن هذا أمر مؤكد فيما يتعلق بالفضاءات المترية • ولكن ماذا يمكن قوله عن توسيع عمليات الفضاء المتجهي والتنظيم الى فضاء الاتمام ؟ سنرى في البند التالي أن هذا التوسيع ممكن حقا •

٢-٢-٧ مثال على فضاء منظم غير تام واتمامه $L^2[a, b]$

يشكل الفضاء المتجهي لكل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ فضاء منظما X نظيمه معطى بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (7)$$

ان هذا فضاء غير تام . فمثلا اذا كان $[a, b] = [0, 1]$ ، فان المتتالية في ١-٥-٩ هي متتالية لكوشي أيضا في الفضاء الحالي X . ان هذا أمر واضح تقريبا بالنظر الى الشكل ١٠ من البند ١-٥ ، ويتتج بالمكاملة ، ذلك أنه عندما يكون $n > m$ فان

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 [x_n(t) - x_m(t)]^2 dt = \frac{(n-m)^2}{3mn^2} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}.$$

ان متتالية كوشي هذه لا تتقارب ، الامر الذي يمكن اثباته باتباع البرهان نفسه الوارد في ١-٥-٩ ، حيث يستعاض عن المترك في ١-٥-٩ بالمترك الحالي . وفي حال الفترة $[a, b]$ العامة ، فيمكن انشاء متتالية لكوشي مماثلة بحيث تكون غير متقاربة في X .

يمكننا استنادا الى المبرهنة ١-٦-٢ اتمام الفضاء X ، وسنرمز الى هذا الاتمام بالشكل $L^2[a, b]$. ان $L^p[a, b]$ هو فضاء باناخ ، ذلك أنه يمكن توسيع التنظيم على X والعمليتين على الفضاء المتجهي الى اتمام X ، الامر الذي سنراه في البند التالي استنادا الى المبرهنة ٢-٣-٢ .

وبوجه أعم ، فانه أيا كان العدد الحقيقي المثبت $p \geq 1$ ، فان فضاء باناخ

$$L^p[a, b]$$

هو الاتمام للفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ ، كما في السابق ، والتنظيم حينئذ معرف بالدستور

$$(8) \quad \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

وقد وضعنا الدليل السفلي p كي يذكرنا بأن هذا التنظيم تابع لاختيارنا للعدد p الذي نبقية مثبتا . لاحظ أنه عندما يكون $p=2$ ، فاننا نجد (7) •

هذا ، ونذكر للقراء الذين لهم معرفة بتكامل لوبيك أنه يمكن الحصول أيضا على الفضاء $L^p[a, b]$ بطريقة مباشرة باستعمال تكامل لوبيك ودوال x القیوسة وفق لوبيك على $[a, b]$ ، بحيث يكون تكامل لوبيك للدالة $|x|^p$ على $[a, b]$ موجودا ومنتهيا . وعناصر $L^p[a, b]$ تكون عندئذ صفوف تكافؤ لهذه الدوال ، حيث x يكون مكافئا لـ y اذا كان تكامل لوبيك لـ $|x-y|^p$ على $[a, b]$ مساويا للصفر . [لاحظ أن هذا يضمن صحة الموضوع (٢ن)] •

أما القراء الذين ليس لهم معرفة سابقة بتكامل لوبيك، فليس من داع لانزعاجهم، ذلك أن هذا المثال ليس ضروريا لمباحثنا القادمة . ومهما يكن من أمر ، فإن أهمية هذا المثال تكمن في ان الالتزام قد يقودنا الى نوع جديد من العناصر ، وقد يكون لزاما علينا اتوصل الى طبيعة هذه العناصر •

٨-٢-٢ الفضاء s

هل يمكن لكل مترك على فضاء متجهي أن يولد من تنظيم ؟ ان الجواب عن هذا السؤال تتم بالنفي • ويشكل الفضاء s في ١-٢-١ مثالا على صحة ما نقول • وفي الحقيقة ، فإن s هو فضاء متجهي ، الا ان المترك d على s المعرف بالمساواة

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

لا يمكن أن يولد من تنظيم ، الامر الذي ينتج مباشرة من التمهيد التالي الذي ينص على أن المترك d المولد من تنظيم يجب أن يحقق خاصتين أساسيتين • ان أولى هاتين الخاصتين وهي الواردة في (9a) تسمى لا تغير الانسحاب للمترك d •

كل مترك d مولد من تنظيم على فضاء منظم X يجب أن يحقق الخاصتين التاليتين

$$\begin{aligned} (a) \quad & d(x+a, y+a) = d(x, y) \\ (b) \quad & d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y) \end{aligned}$$

أيا كانت العناصر x و y و a من X وأيا كان العدد α .

البرهان :

لدينا

$$d(x+a, y+a) = \|x+a - (y+a)\| = \|x-y\| = d(x, y)$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x-y\| = |\alpha| d(x, y). \quad \blacksquare$$

مسائل

- ١ - يبين أن التنظيم $\|x\|$ للعنصر x هو المسافة بين x و 0 .
- ٢ - تحقق من أن الطول المعروف لمتجه في المستوي أو في الفضاء ثلاثي البعد يحقق خواص التنظيم (١) - (٤) .
- ٣ - أثبت صحة (2) .
- ٤ - يبين أنه يمكن الاستعاضة عن (٢) بالشرط

$$\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

دون تغيير تعريف التنظيم . أثبت أن شرط كون التنظيم عددا غير سالب ينتج أيضا من (٣) و (٤) .

٥ - أثبت أن (3) يحدد نظيما •

٦ - ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الأزواج المرتبة $x = (\xi_1, \xi_2)$ و $y = (\eta_1, \eta_2)$ من الأعداد الحقيقية • يبين أن المساويات الثلاث التالية تعين نظائما على X :

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$$

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

٧ - أثبت أن (4) يحقق الشروط (ن) - (ن٤) •

٨ - توجد نظائما مختلفة ذات أهمية تطبيقية على الفضاء المتجهي المؤلف من كل المرتبات n من الأعداد (٢-٢-٢) وهي معرفة بالدساتير

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \dots + |\xi_n|$$

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \dots + |\xi_n|^p)^{1/p} \quad (1 < p < +\infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|\xi_1|, \dots, |\xi_n|\}.$$

تحقق في كل من هذه الحالات أن الشروط (ن) - (ن٤) محققة •

٩ - تحقق من أن (5) تحدد نظيما •

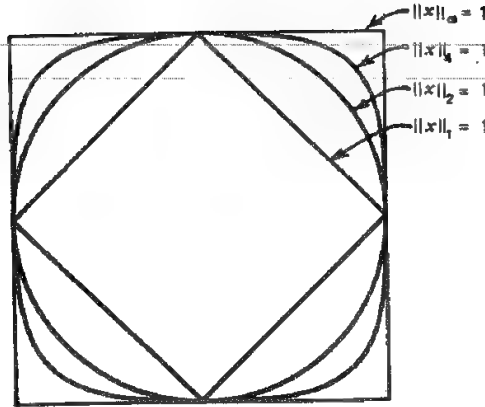
١٠ - الكرة الواحدة • تدعى الكرة

$$S(0; 1) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

في فضاء منظم الكرة الواحدة • يبين أنه في حال النظائما الواردة في المسألة ٦ والنظيم المحدد بالمساواة

$$\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{1/4}$$

فان الكرات الواحدة تبدو كما هو مبين في الشكل ١٦ •



الشكل (١٦). الكرات الواحدة في المسألة ١٠

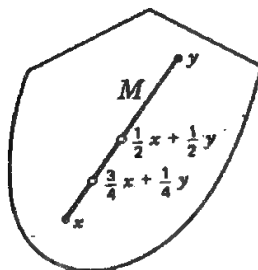
١١- (المجموعة المحدبة ، القطعة المستقيمة) يقال عن مجموعة جزئية A من فضاء متجهي X انها محدبة اذا اقتضى وقوع أي نقطتين x و y من A تحقق العلاقة

$$M = \{z \in X \mid z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A.$$

تدعى M قطعة مستقيمة مغلقة حدها النقطتان x و y ، وتدعى كل نقطة أخرى من z نقطة داخلية في M . يبين أن الكرة الواحدة المغلقة

$$\bar{B}(0; 1) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

في فضاء منظم X محدبة .



مجموعة محدبة

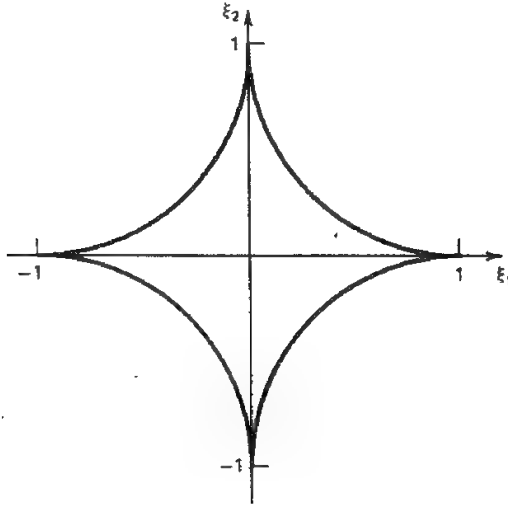
مجموعة ليست محدبة

الشكل (١٧) مثالان يوضحان مجموعة محدبة واخرى غير محدبة (المسألة ١١)

١٢- بين الافادة من المسألة ١١ أن المساواة

$$\varphi(x) = (\sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|})^2$$

لا تحدد نظيماً على الفضاء المتجهي المؤلف من كل الأزواج المرتبة $x = (\xi_1, \xi_2) \dots$ من الأعداد الحقيقية • ارسم المنحني $\varphi(x) = 1$ وقارنه بالشكل ١٨



الشكل (١٨) المنحني $\varphi(x) = 1$ في المسألة ١٢

١٣- بين أن المتركة المتقطع على فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ لا يمكن أن يولد من تنظيم (١-١-٨) •

١٤- إذا كان d متركة على فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ مولداً من تنظيم ، وكان d معرفاً على النحو التالي

$$\bar{d}(x, x) = 0, \quad \bar{d}(x, y) = d(x, y) + 1 \quad (x \neq y),$$

فبين أن \bar{d} لا يمكن أن يولد من تنظيم •

١٥- (المجموعة المحدودة) • بين أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة

جزئية M من فضاء منظم X محدودة هو أن يوجد عدد موجب ϵ بحيث
 تحقق المتباينة $\|x\| \leq \epsilon$ أيما كان x من M • (لتعريف المجموعة المحدودة
 عُد الى المسألة ٦ من البند ٢-١) •

٢-٣ خواص أخرى للفضاءات المنظمة

ان الفضاء الجزئي Y من فضاء منظم X هو تعريفا فضاء جزئي من X
 باعتباره فضاء متجهيا ، نظيمه مقصور نظيم X على المجموعة الجزئية Y • ونقول
 عن نظيم Y هذا انه مولد من النظيم على X • وفي حال كون Y مجموعة مغلقة
 في X ، فاننا نقول إن Y فضاء جزئي مطلق X من •

كذلك ، يعرف الفضاء الجزئي Y من فضاء باناخ X بأنه فضاء جزئي من X
 باعتبار X فضاء منظما • لذا فاننا لا تتطلب من Y أن يكون تاما (رغم أن بعض
 المؤلفين يعتبرونه كذلك • وهكذا فالحذر ضروري لدى مقارنة الكتب المختلفة) •
 وفي هذا الصدد ، تكون المبرهنة ١-٤-٧ ذات فائدة لانها تقتضي مباشرة
 المبرهنة التالية :

٢-٣-١ مبرهنة (الفضاء الجزئي من فضاء باناخ)

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء باناخ X تاما هو
 ان تكون المجموعة Y مغلقة في X •

ان التقارب وبعض المفاهيم المرتبطة به في الفضاءات المنظمة تتج مباشرة
 من التعريفين ١-٤-١ و ٣-٤-١ الواردين في معرض الفضاءات المترية ، ومن كون
 $d(x, y) = \|x - y\|$ وعلى وجه التحديد ، نجد ما يلي :

(i) تكون المتتالية (x_n) في فضاء منظم X متقاربة اذا وجد عنصر x في
 X بحيث أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

- ونكتب عندئذ $x \rightarrow x_n$ ، كما نسمي x نهاية المتتالية (x_n) .
(ii) تكون المتتالية (x_n) في فضاء منظم متتالية كوشي إذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث تتحقق المتباينة

$$(1) \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

أيا كان العددين الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n > N$.

لقد تعاملنا مع المتتاليات حتى في الفضاءات المترية العامة . أما في الفضاءات المنظمة ، فإننا سنخطو خطوة هامة أخرى وذلك باستعمالنا للمتسلسلات كما يلي :

يمكن تعريف المتسلسلة غير المنتهية بصورة مماثلة لما فعلنا في التحليل الحقيقي . وفي الواقع ، فإذا كانت (x_k) متتالية في فضاء منظم X ، فمن الممكن أن نقرن بها المتتالية (s_n) للمتجميع الجزئية

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

حيث $n = 1, 2, \dots$. فإذا كانت (s_n) متقاربة ، ولنفترض مثلاً أن

$$s_n \rightarrow s \quad \text{أي أن} \quad \|s_n - s\| \rightarrow 0$$

قلنا إن المتسلسلة غير المنتهية ، أو اختصاراً المتسلسلة

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \dots$$

متقاربة ، وأن مجموعها يساوي s . وعندئذ نكتب

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \dots$$

إذا كانت المتسلسلة $\|x_1\| + \|x_2\| + \dots$ متقاربة ، قلنا إن المتسلسلة (2) متقاربة بالاطلاق . ويجدر بنا في هذا المقام تنبيه القارئ بأن الشرط اللازم

والكافي كي يقتضى التقارب المطلق لمتسلسلة تقارب هذه المتسلسلة في فضاء منظم X هو أن يكون X فضاء تاما (عد الى المسألتين ٩٥٧) •

ان مفهوم التقارب يمكن توظيفه في تعريف « قاعدة » كما يلي : اذا حوى فضاء منظم X متتالية (e_n) بحيث أنه يوجد لكل عنصر x في X متتالية وجيدة من الاعداد (α_n) يتحقق معها الشرط

$$(3) \quad \|x - (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)\| \rightarrow 0$$

عندما $n \rightarrow \infty$ ، فان (e_n) تدعى قاعدة شاوور (أو قاعدة) للفضاء X • وتدعى عندئذ المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

التي مجموعها x منشور x بالنسبة ل (e_n) ، ونكتب

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

وعلى سبيل المثال ، فانه يوجد ل l^p في ٢-٢-٣ قاعدة شاوور (e_n) حيث $e_n = (\delta_{ni})$ ، أي أن e_n هي المتتالية التي حدها ذو الترتيب n يساوي 1 ، وكل حدودها الاخرى أصفار • وهكذا فان

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$(4) \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

وهكذا •

اذا وجد لفضاء منظم X قاعدة شاوور ، فانه X فصول (راجع التعريف ١-٣-٥) • وبما أن البرهان على هذا أمر سهل ، فاننا نترك اقامته للقارئ (المسألة ١٠) • وبالمقابل، فهل يوجد لكل فضاء فصول لباناخ قاعدة لساوور ؟ ان هذا سؤال شهير طرحه باناخ نفسه منذ قرابة ٥٠ سنة • لقد تم اثبات وجود قاعدة لساوور في أغلب فضاءات باناخ الفصول المعروفة • ورغم ذلك ، فان الاجابة

عن السؤال السابق تتم بالنفي ، ذلك أن إنقلو (١٩٧٣) تمكن منذ عهد قريب من انشاء فضاء فصول لباناخ دون أن يكون لهذا الفضاء قاعدة لشاودر .

لننقل أخيرا الى مسألة اتمام الفضاء المنظم ، والتي مررنا على ذكرها بسرعة في البند السابق .

٢-٣-٢ مبرهنة (الانتهاء)

ليكن $X = (X, \|\cdot\|)$ فضاء منظما . عندئذ هناك فضاء لباناخ \hat{X} وتطبيق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من \hat{X} كثيف في \hat{X} . ان الفضاء \hat{X} وحيد اذا غرضنا النظر عن الفضاءات الايزومترية معه ، (بمعنى انه اذا كان \hat{X} أي فضاء لباناخ يحوي فضاء جزئيا كثيفا W ايزومتريا مع X ، فان الفضاءين \hat{X} و \hat{X} ايزومتريان) .

البرهان :

تقتضي المبرهنة ٢-٦-١ وجود فضاء متري تام $\hat{X} = (\hat{X}, d)$ ووجود تطبيق ايزومتري $A: X \rightarrow W = A(X)$ ، حيث W كثيف في \hat{X} ، وحيث \hat{X} وحيد بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه . (نستعمل هنا الحرف A دون T ، كما في ٢-٦-١ ، وذلك لاننا سنستعمل الحرف T بمعنى آخر لدى دراسة بعض التطبيقات القادمة في البند ٢-٨) . وبالتالي ، فيجب علينا لاثبات هذه المبرهنة أن نجعل من \hat{X} فضاء متجهيا ، ومن ثم نعرف على \hat{X} نظيما مناسباً .

لتعريف عمليتي الفضاء المتجهي الجبريتين على \hat{X} ، نأخذ أي عنصرين x و y من \hat{X} وأي ممثلين (x_n) من x و (y_n) من y . وعلينا أن نذكر بأن x و y هما صفا تكافؤا لمتتاليات كوشي في X . فاذا فرضنا أن $z_n = x_n + y_n$ فان (z_n) هي متتالية لكوشي في X لان

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n + y_n - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

سنعرف المجموع $z = x + y$ بأنه صفا التكافؤ الذي تشكل (z_n) مثلاً له . لذا فان $(z_n) \in z$. ان هذا التعريف مستقل عن اختيارنا الخاص لمتتاليتي

كوشي المنتميتين الى \mathcal{E} و \mathcal{F} ، ذلك أن (1) في البند ١-٦ تبين بأنه اذا كان

$$(x_n) \sim (x_n') \text{ و } (y_n) \sim (y_n') \text{ ، فان } (x_n + y_n) \sim (x_n' + y_n') \text{ لان}$$

$$\|x_n + y_n - (x_n' + y_n')\| \leq \|x_n - x_n'\| + \|y_n - y_n'\|.$$

ونعرف بصورة مماثلة الجداء αx في \mathcal{X} لعدد α بالعنصر x على أنه صف التكافؤ الذي تمثله (αx_n) . ومرة ثانية ، فان هذا التعريف مستقل عن اختيارنا الخاص لممثل x . والعنصر الصفري في \mathcal{X} هو صف التكافؤ الحاوي على كل متتاليات كوشي المتقاربة من الصفر . ومن السهل التحقق بأن لهاتين العمليتين الجبريتين كل الخواص المطلوبة تعريفا كي يشكل \mathcal{X} فضاء متجهيا . ويترتب على التعريف أن عمليتي الفضاء المتجهي على W المولدين من \mathcal{X} تنسجمان مع العمليتين المولدين من X بواسطة A .

كذلك ، فان A يولد على W نظيما $\|\cdot\|_1$ قيمته في كل نقطة $\hat{y} = Ax$ من W هي $\|\hat{y}\|_1 = \|x\|$. والمترك الموافق على W هو مقصور \hat{d} على W نظرا لكون A تطبيقا ايزومتريا . ويمكننا تمديد النظم $\|\cdot\|_1$ الى \mathcal{X} بوضع $\|\hat{x}\|_2 = d(\hat{0}, \hat{x})$ أيا كان x من \mathcal{X} ، ذلك أن من الواضح بأن $\|\cdot\|_2$ تحقق (ن١) و (ن٢) من البند ٢-٢ ، وأن الموضوعتين الاخرين (ن٣) و (ن٤) تتجان من نظيرتيهما المتعلقتين بالنظم $\|\cdot\|_1$ وذلك بالانتقال الى النهاية . ■

مسائل

- ١ - اثبت ان $c \in \mathcal{I}$ يشكل فضاء متجهيا جزئيا من \mathcal{I} (١-٥-٣) ، وكذلك c_0 المؤلف من كل متتاليات الاعداد المتقاربة من الصفر .
- ٢ - يبين أن c_0 الوارد في المسألة ١ هو فضاء جزئي مغلق في c ، وبالتالي . فان c_0 تام استنادا الى ١-٥-٢ و ١-٤-٧ .
- ٣ - لتكن المجموعة الجزئية \mathcal{Y} من \mathcal{I} مؤلفة من كل المتتاليات التي يوجد في كل منها عدد منته فقط من الحدود غير الصفرية . يبين أن \mathcal{Y} فضاء جزئي من \mathcal{I} ، الا أنه غير مغلق .

٤ - (استمرار عمليتي الفضاء المتجهي) أثبت أن عمليتي الجمع المتجهي والضرب
 بعدد في فضاء منظم X عمليتان مستمرتان بالنسبة للنظيم ، أي أن التطبيقين
 $(x, y) \mapsto x+y$ و $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ مستمران .

٥ - برهن أنه إذا كان $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ فإن $x_n + y_n \rightarrow x+y$. أثبت أنه
 إذا كان $\alpha_n \rightarrow \alpha$ و $x_n \rightarrow x$ فإن $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$.

٦ - أثبت أن اللصاقة \bar{Y} للفضاء الجزئي Y من فضاء منظم X هي أيضا فضاء
 متجهي جزئي .

٧ - (التقارب المطلق) . يبين أن تقارب المتسلسلة $\|y_1\| + \|y_2\| + \|y_3\| + \dots$ قد
 لا يقتضي تقارب المتسلسلة $y_1 + y_2 + y_3 + \dots$. إرشاد . خذ Y الوارد في
 المسألة ٣ والمتتالية (y_n) حيث $y_n = (\eta_j^{(n)})$ و $\eta_n^{(n)} = 1/n^2$ و $\eta_j^{(n)} = 0$ عندما
 $j \neq n$.

٨ - إذا اقتضى التقارب المطلق لاي متسلسلة في فضاء منظم تقارب هذه
 المتسلسلة ، فيبين أن X فضاء تام .

٩ - أثبت أن كل متسلسلة متقاربة بالاطلاق في فضاء باناخ متقاربة .

١٠ - (قاعدة شاوور) : بين أنه إذا وجدت قاعدة لشاودر في فضاء منظم ، فانه
 فصول .

١١ - أثبت أن (e_n) ، حيث $e_n = (\delta_{nj})$ ، قاعدة شاودر للفضاء l^p ، بفرض أن
 $1 \leq p < +\infty$.

١٢ - (نصف التنظيم) يعرف نصف التنظيم على فضاء متجهي X بأنه تطبيق
 $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ يحقق الشروط (١) و (٣) و (٤) من البند ٢-٢ (ويسميه
 بعض المؤلفين شبه التنظيم) . أثبت أن

$$p(0) = 0,$$

$$|p(y) - p(x)| \leq p(y-x).$$

(وبالتالي ، فإذا اقتضت المساواة $p(x) - 0$ أن $x=0$ ، فإن p تنظيم) .

١٣- بين أن العناصر x من X في المسألة ١٢ والمحققة للمعادلة $p(x)=0$ تشكل

فضاء جزئيا N من X ، كما أنه يمكن تعريف تنظيم على X/N (راجع المسألة

١٤ من البند ١-٢) بالمساواة $\|\hat{x}\|_0 = p(x)$ ، حيث $x \in \hat{x}$ و $\hat{x} \in X/N$.

١٤- (فضاء حاصل القسمة) ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا من فضاء منظم

$(X, \|\cdot\|)$. بين أنه يمكن تعريف تنظيم $\|\cdot\|_0$ على X/Y (راجع المسألة ١٤

من البند ١-٢) بالمساواة

$$\|\hat{x}\|_0 = \inf_{x \in \hat{x}} \|x\|$$

حيث $\hat{x} \in X/Y$ ، أي أن \hat{x} أي مجموعة مرافقة لـ Y .

١٥- (جداء الفضاءات المنظمة) . إذا كان $(X_1, \|\cdot\|_1)$ و $(X_2, \|\cdot\|_2)$ فضاءين

منظمين، فين أن فضاء الجداء المتجهي $X = X_1 \times X_2$ (المسألة ١٣ من البند

١-٢) يحدد فضاء منظما عند وضع

$$\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2) \quad [x = (x_1, x_2)].$$

٢-٤ الفضاءات المنظمة والفضاءات الجزئية منتهية البعد

هل الفضاءات المنظمة منتهية البعد أبسط من الفضاءات غير منتهية البعد؟ وفي

أي صدد؟ ان طرح مثل هذه الاسئلة أمر طبيعي، وأهميتها تتبع من كون

الفضاءات المنظمة رفضاءاتها الجزئية تلعب دورا بارزا في العديد من المواضيع

(كنظرية التقريب والنظرية الطيفية مثلا) . ويمكن قول الكثير من الاشياء المهمة

في هذا السياق . لذا فمن الاهمية بمكان تجميع بعض الحقائق حول هذه الفضاءات

لكونها مهمة في حد ذاتها، ولانها تشكل أدوات لابحاثنا القادمة . وهذا هو

موضوعنا في البند الحالي ولاحقه .

ويشكل التمهيد التالي مصدرا لكثير من النتائج المتوخاة . وينص بصورة

تقريبية على أنه في حال الاستقلال الخطي للمتجهات، فمن غير الممكن ايجاد

تركيب خطي يحوي أعدادا كبيرة ويمثل في الوقت نفسه متجها صغيرا .

٢-٤-١ تمهيدية (التراكيب الخطية)

لتكن $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات من فضاء منظم X (أيا كان بعده) ، عندئذ يوجد عدد موجب c بحيث تتحقق المتباينة

$$(1) \quad \|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) \quad (c > 0).$$

أيا كانت الاعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

البرهان :

سنرمز بـ s للمقدار $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$. فإذا كان $s = 0$ ، فإن كلا من α_i يساوي الصفر ، وبالتالي فإن (1) تكون محققة أيا كانت c . لنفرض الآن أن $s > 0$. عندئذ تكون (1) مكافئة للمتباينة الناتجة عن (1) بتقسيم طرفيها على s . فإذا فرضنا أن $\beta_i = \alpha_i/s$ ، فإن (1) تكافئ المتباينة

$$(2) \quad \|\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n\| \geq c \quad \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1 \right).$$

لذا فإنه يكفي البرهان على وجود عدد موجب c بحيث تكون (2) محققة أيا كانت المرتبة n من الاعداد β_1, \dots, β_n حيث $\sum |\beta_i| = 1$.

لنفترض مؤقتا عدم صحة هذا الامر . عندئذ توجد متتالية (y_m) من المتجهات

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \dots + \beta_n^{(m)} x_n \quad \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}| = 1 \right)$$

بحيث أن

$$\|y_m\| \rightarrow 0 \quad \text{عندما} \quad m \rightarrow \infty$$

ان محاكمتنا الآن ستكون على النحو التالي : لما كان $\sum |\beta_i^{(m)}| = 1$ ، فإن $|\beta_i^{(m)}| \leq 1$ لذا فإن المتتالية

$$(\beta_i^{(m)}) = (\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \dots)$$

تكون محدودة لدى تثبيت i . وبالتالي ، فإنه يترتب على مبرهنة بولزانو - فيرستراس أن المتتالية $(\beta_i^{(m)})$ تحوي متتالية جزئية متقاربة . لنرمز بـ β_1 لنهاية هذه المتتالية الجزئية ، وبـ $(y_{1,m})$ لنهاية المتتالية الجزئية المقابلة من (y_m) . وباجراء مناقشة مماثلة ، فإننا نجد أن $(y_{1,m})$ تحوي متتالية جزئية $(y_{2,m})$ بحيث تكون المتتالية الجزئية المقابلة من الاعداد $\beta_2^{(m)}$ متقاربة ، ولنرمز بـ β_2 لنهاية $\beta_2^{(m)}$. فاذا واصلنا السير في هذه الطريق ، فإننا نجد بعد خطوات عددها n متتالية جزئية (y_m) من $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \dots)$ حدودها من الشكل

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(m)} x_j \quad \left(\sum_{j=1}^n |\gamma_j^{(m)}| = 1 \right)$$

حيث تحقق الاعداد $\gamma_j^{(m)}$ الشرط $\gamma_j^{(m)} \rightarrow \beta_j$ عندما $m \rightarrow \infty$. لذا نجد أنه عندما $m \rightarrow \infty$ يكون

$$y_{n,m} \rightarrow y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$$

حيث $\sum |\beta_j| = 1$ ، وهذا يعني أنه لا يمكن أن تكون الاعداد β_j أصفارا معا . وبما أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا ، فإن $y \neq 0$. ونجد من جهة أخرى أن $y_{n,m} \rightarrow y$ يقتضي $\|y_{n,m}\| \rightarrow \|y\|$ استنادا الى استمرار التنظيم . ولما كان $\|y_m\| \rightarrow 0$ فرضا ، وكانت $(y_{n,m})$ متتالية جزئية من (y_m) ، فلا بد أن يكون $\|y_{n,m}\| \rightarrow 0$ ، وهذا يقتضي المساواة $\|y\| = 0$ وفق (ن ٢) من البند ٢-٢ . وبما أن هذا يناقض كون $y \neq 0$ ، فإننا نكون قد أثبتنا صحة التمهيدية . ■

وكتطبيق أول لهذه التمهيدية ، سنورد المبرهنة الاساسية التالية :

٢-٤-٢ مبرهنة (التمام)

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاما . وبوجه خاص ، فإن كل فضاء منظم منتهي البعد تام .

البرهان :

لتكن (y_m) متتالية ما لكوشي في Y ، ولنثبت أنها متقاربة في Y ، رامزين
للنهاية بـ y . لنفترض أن $\dim Y = n$ وأن $\{e_1, \dots, e_n\}$ أي قاعدة لـ Y . عندئذ
يكون لكل y_m تمثيل وحيد بالشكل

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

ولما كانت (y_m) متتالية كوشي ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح
موجب N بحيث أن $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ عندما يكون $m, r > N$. يترتب على هذا وعلى
التمهيدية ٢-٤-١ وجود عدد موجب c بحيث أن

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|,$$

عندما يكون $m, r > N$. وبالتقسيم على c نجد أن

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \quad (m, r > N).$$

وهذا يبين أن كلا من المتتاليات الآتية (التي عددها n)

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \dots) \quad j = 1, \dots, n$$

هي متتالية في \mathbb{R} أو \mathbb{C} ، وبالتالي فانها متقاربة ، وسنرمز لنهايتها بـ α_j . لنعرف
بعد هذا (باستخدام النهايات α_1 و \dots و α_n) العنصر y بالمساواة

$$y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

من الواضح أن $y \in Y$ ، كما أن

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\|.$$

لما كان $\alpha_j^{(m)} \rightarrow \alpha_j$ في الطرف الايمن ، فان $\|y_m - y\| \rightarrow 0$ ، أي أن $y_m \rightarrow y$.

وهذا يبين أن (y_m) متقاربة في Y • وبما أن (y_m) متتالية اختيارية لكوشي في Y فإن Y تام • ■

نستنتج من هذه المبرهنة والمبرهنة ١-٤-٧ ما يلي :

٢-٤-٣ مبرهنة (الانفلاق)

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد ان يكون مغلقا في X •
سنحتاج الى هذه المبرهنة في عدة مناسبات في أبحاثنا القادمة •
ويجدر بنا توجيه النظر الى أنه ليس لزاما على الفضاءات الجزئية غير منتهية البعد أن تكون مغلقة •

مثال :

ليكن $X = C[0, 1]$ و $Y = \text{span}(x_0, x_1, \dots)$ حيث $x_i(t) = t^i$ ، أي أن Y هي مجموعة الحدوديات جميعا • ان Y ليس مغلقا في X (لماذا ؟)
ثمة خاصة هامة أخرى للفضاء المتجهي منتهي البعد X تلخص في أن جميع النظم على X تولد الطوبولوجيا نفسها على X (راجع البند ١-٣) ، أي أن كل المجموعات المفتوحة في X هي نفسها بغض النظر عن الاختيار الخاص لتنظيم على X • أما تفصيل هذا الامر فهو وارد في ثانيا المبرهنة التالية :

٢-٤-٤ تعريف (النظم المكافئة)

نقول عن تنظيم $\|\cdot\|$ على فضاء متجهي X انه مكافئ للنظيم $\|\cdot\|_0$ على X اذا وجد عدداً موجبان a و b بحيث يتحقق الشرط

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0. \quad (3)$$

أيما كان x من X •

وتفسر الحقيقة التالية سبب تبيننا لهذا التعريف •

يحدد النظامان المتكافئان على X طوبولوجيا واحدة على X .

وفي الحقيقة ، فإن هذا الامر ناتج من (3) ومن أن كل مجموعة مفتوحة غير خالية هي اجتماع لكرات مفتوحة (راجع المسألة ٤ من البند ٣-١) . سنترك تفاصيل ايراد البرهان للقارئ (المسألة ٤) الذي يمكن أن يثبت أيضا بأن متتاليات كوشي في الفضاءين $(X, \|\cdot\|_0)$ و $(X, \|\cdot\|_0)$ واحدة (المسألة ٥) . ويمكننا باستخدام التمهيدية ٢-٤-١ أن نثبت صحة المبرهنة التالية التي لاتصح في حال الفضاءات غير منتهية البعد) .

مبرهنة (النظام المتكافئة)

كل نظام $\|\cdot\|$ على فضاء متجهي منتهي البعد X لابد أن يكافئ اي نظام آخر $\|\cdot\|_0$ على X .

البرهان :

لنفترض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \dots, e_n\}$ أي قاعدة للفضاء X . عندئذ يكون لكل x من X تمثيل وحيد

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

ونجد استنادا الى التمهيدية ٢-٤-١ أن هنالك عددا موجبا c بحيث يكون

$$\|x\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|).$$

كذلك ، فإن متباينة المثلث تعطي

$$\|x\|_0 \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leq k \sum_{j=1}^n |\alpha_j|, \quad k = \max_j \|e_j\|_0.$$

يترتب على ما سبق أن $\|x\|_0 \leq \|x\|$ حيث $a = c/k > 0$. أما المتباينة الاخرى في (3) فنجدها بجعل كل من النظامين $\|\cdot\|_0$ و $\|\cdot\|$ يلعب دور الآخر في المناقشة السابقة . ■

لهذه النظرية أهمية تطبيقية كبيرة . فهي تقتضي مثلا أن تقارب أو تباعد.

متتالية في فضاء متجهي منتهي البعد لا يتعلق بالاختيار الخاص للنظيم الذي نزود به الفضاء .

مسائل

- ١ - أعط أمثلة على فضاءات جزئية غير مغلقة من \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 .
- ٢ - ما هي أكبر قيمة ممكنة للعدد c في (١) في كل مما يلي : (أ) $X = \mathbb{R}^2$ و $x_1 = (1, 0)$ و $x_2 = (0, 1)$ ، (ب) $X = \mathbb{R}^3$ و $x_1 = (1, 0, 0)$ و $x_2 = (0, 1, 0)$ و $x_3 = (0, 0, 1)$ ؟
- ٣ - أثبت أن موضوعات علاقة التكافؤ تصح في التعريف ٢-٤-٤ .
- ٤ - بين أن النظام المتكافئة على فضاء متجه X تولد طبولوجيا واحدة على X .
- ٥ - إذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمين متكافئين على X ، فبين أن متتاليات كوشي واحدة في الفضاءين $(X, \|\cdot\|_0)$ و $(X, \|\cdot\|)$.
- ٦ - يترتب على المبرهنة ٢-٤-٥ أن النظيمين $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|$ في المسألة ٨ من البند ٢-٢ متكافئان . أعط برهاناً مباشراً على صحة هذا الأمر .
- ٧ - ليكن $\|\cdot\|$ نظيماً كما في المسألة ٨ من البند ٢-٢ ، ولنفترض أن $\|\cdot\|$ أي تنظيم على ذلك الفضاء المتجهي، وليكن X . أثبت مباشرة (دون اللجوء الى ٢-٤-٥) وجود عدد موجب b بحيث يكون $\|x\| \leq b \|x\|_2$ أيما كان x .
- ٨ - بين أن النظيمين $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_2$ في المسألة ٨ من البند ٢-٢ يحققان الشرط

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

- ٩ - إذا كان النظيمان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ على فضاء متجهي X متكافئين ، فبين صحة ما يلي : (i) $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ تقتضي (ii) $\|x_n - x\|_0 \rightarrow 0$ (وبالعكس طبعاً) .

١٠- أثبت أن كل المصفوفات $A = (a_{jk})$ من المرتبة $m \times n$ ، حيث m و n عددان
مثنان تشكّل فضاء متجهيا Z بعده mn . بين بأن كل النظام على Z
متكافئة . ما هي مشابهاة النظام $\| \cdot \|_1$ و $\| \cdot \|_2$ و $\| \cdot \|_\infty$ الواردة في
المسألة ٨- من البند ٢-٢ في حالة الفضاء الحالي Z ؟

٢-٥ التراص والبعد المنتهي

هنالك خواص قليلة أساسية أخرى للفضاءات المنظمة منتهية البعد وللفضاءات
الجزئية منها ترتبط بمفهوم التراص ، الذي نعرفه على النحو التالي .

٢-٥-١ تعريف (التراص)

نقول عن فضاء متري X انه متراص* اذا حوت كل متتالية في X متتالية
جزئية متقاربة . ونقول عن مجموعة جزئية M من X انها متراصة اذا كانت M
متراصة باعتبارها فضاء جزئيا من X ، أي اذا حوت كل متتالية في M متتالية جزئية
نهايتها عنصر من M . ■

وتقدم التمهيدية التالية سمة عامة للمجموعات المتراصة .

٢-٥-٢ تمهيدية (التراص)

كل مجموعة جزئية M من فضاء متري مغلقة ومحدودة .

البرهان :

من المعلوم استنادا الى (٦) من ١-٤-٦ أنه اذا كان x عنصرا ما من \bar{M}

(*) وبصورة أدق ، إنه متراص تنابغيا . وهذا هو أهم نوع من أنواع التراص
في التحليل الرياضي . ومن الجدير بالذكر أن ثمة نوعين آخرين من التراص ،
يبد أن أنواع التراص الثلاثة المختلفة تتطابق في الفضاءات المترية ، وبالتالي
فإن التمييز بينها غير وارد في أبحاثنا .

فتوجد متتالية (x_n) في M بحيث أن $x_n \rightarrow x$ • ولما كانت M متراصة ، فإن $x \in M$ ، الامر الذي يعني أن M مغلقة نظرا لكون العنصر x من \bar{M} كيفما • لننتقل الى اثبات محدودية M • اذا افترضنا مؤقتا أن M غير محدودة ، فلا بد أن تحوي عندئذ متتالية غير محدودة (y_n) بحيث يكون $d(y_n, b) > n$ ، بافتراض b أي عنصر مثبت • ان هذه المتتالية لا يمكن أن تحوي متتالية جزئية متقاربة ، ذلك أن كل متتالية جزئية متقاربة يجب أن تكون محدودة وفق التمهيدية ١-٤-٢ • ■

ان عكس هذه التمهيدية غير صحيح بعامه •

البرهان :

لايات هذه الدعوى الهامة ، نأخذ المتتالية (e_n) في l^2 ، حيث $e_n = (\delta_{nj})$ متتالية حدها ذو الترتيب n يساوي ١ في حين تكون حدودها الاخرى جميعا مساوية ٠ • (راجع (٤) من البند ٢-٣) • ان هذه المتتالية محدودة لان $\|e_n\| = 1$ ، كما تشكل حدودها مجموعة مغلقة لعدم وجود نقطة تراكم لها • كذلك ، فان هذه المجموعة ليست متراصة للسبب نفسه • ■

أما في حال الفضاءات المنظمة المنتهية ، فنجد ما يلي :

٢-٣ مبرهنة (التراص)

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء منظم منتهي البعد متراصة هو ان تكون M مغلقة ومحدودة •

البرهان :

ان التراص يقتضي الانغلاق والمحدودية كما رأينا في التمهيدية ٢-٥-٢ ، وسنبرهن الآن على العكس • لتكن M مغلقة ومحدودة ، ولنفترض أن $\dim X = n$ وأن قاعدة لـ X • لنأخذ المتتالية (x_m) في M • عندئذ يوجد لكل x_m التمثيل

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \dots + \xi_n^{(m)} e_n.$$

ولما كانت M محدودة ، فإن (x_m) تكون كذلك ، ولنفترض مثلاً أن $\|x_m\| \leq k$ أي
كان m . لذا فانه يترتب على التمهيدية ٢-٤-١ أن

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(m)}|$$

حيث c عدد موجب . نستنتج من هذا أن المتتالية العددية $(\xi_j^{(m)})$ (j مثبت)
محدودة ، وانه استنادا الى مبرهنة بولزانو — فيرستراس يوجد لها نقطة تراكم
 ξ_j (لدينا هنا $1 \leq j \leq n$) . نستخلص من هذا كما فعلنا في برهان التمهيدية
٢-٤-١ أن (x_m) تحوي متتالية جزئية (z_m) تتقارب من $z = \sum \xi_j e_j$. وبما أن
 M مغلقة ، فإن $z \in M$ ، وهذا يبين أنه يوجد لكل متتالية كيفية (x_m) في M
متتالية جزئية تتقارب في M ، الامر الذي يقتضي كون M متراسة . ■

تبين محاكمتنا السابقة أن المجموعات الجزئية المتراسة في \mathbb{R}^n (أو في
فضاء منظم آخر منتهي البعد) هي بالضبط تلك المجموعات الجزئية المغلقة والمحدودة .
وبالتالي ، فان خاصية الانغلاق والمحدودية يمكن أن تسخر لتعريف التراص ، علما
بأن هذا الامر لا يسري على حالة الفضاءات المنظمة غير منتهية البعد .

وتمدنا التمهيدية التالية التي تعزى الى ريس (عام ١٩١٨) بمعين آخر من
نتائج هامة أخرى .

٢-٥-٤ تمهيدية ف. ريس

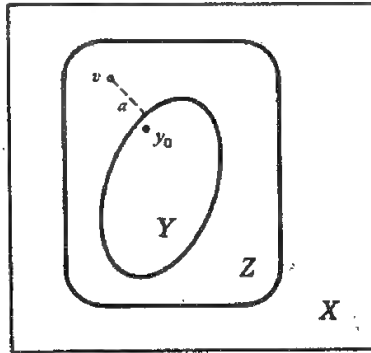
ليكن Z و Y فضاءين جزئيين من فضاء منظم X (أي كان بعده) ، ولنفرض أن
 Y مغلق ومحتوى تماما في Z . عندئذ يوجد لكل عدد حقيقي θ من الفترة $(0, 1)$
عنصر z من Z بحيث أن

$$\|z - y\| \geq \theta \quad \text{لكل } y \in Y, \quad \|z\| = 1$$

البرهان :

ليكن $v \in Z - Y$ ، ولترمز لبعد v عن Y بالعدد a ، أي أن (راجع الشكل ١٩)

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$



الشكل (١٩). تبيان الرموز الواردة في تمهيدية ريس

من الواضح أن $a > 0$ لكون Y مغلقا . لنأخذ الآن أي θ من $(0, 1)$. عندئذ نجد وفق تعريف الحد الأدنى أنه يوجد y_0 من Y بحيث أن

$$(1) \quad a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}$$

(لاحظ أن $a/\theta > a$ نظرا لكون $0 < \theta < 1$) . لنفترض أن

$$c = \frac{1}{\|v - y_0\|} \quad \text{حيث} \quad z = c(v - y_0)$$

عندئذ يكون $\|z\| = 1$ ، وسنبين الآن أن $\|z - y\| \geq \theta$ أيما كان y من Y . لدينا

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c \|v - y_0 - c^{-1}y\| \\ &= c \|v - y_1\| \end{aligned}$$

حيث

$$y_1 = y_0 + c^{-1}y.$$

وبما أن عبارة y_1 تبين أن y_1 عنصر من Y ، فإننا نجد أن $\|v - y_1\| \geq a$ استنادا الى تعريف a . ونجد بوضع c خارجا واستعمال (1) أن

$$\|z - y\| = c \|v - y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq \frac{a}{a/\theta} = \theta.$$

وبما أن y عنصر اختياري من Y ، فإننا نكون قد أكملنا البرهان . ■

ان الكرات المغلقة الواحدة في فضاء منظم منتهي البعد متراصة وفق المبرهنة ٢-٥-٣ . وبالعكس ، فان تمهيدية ريس تمدنا بالمبرهنة الهامة والشهيرة التالية .

٢-٥-٥ مبرهنة (البعد المنتهي)

إذا اتصف فضاء منظم X بان كانت الكرة الواحدة المغلقة $M = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ متراصة فيه ، فان X منتهي البعد .

البرهان :

لنفترض أن M متراصة ، الا أن $\dim X = \infty$ ، ولنبين أن هذا يؤدي الى تناقض . لنختار أي عنصر x_1 نظيمه 1 . ان هذا العنصر يولد فضاء جزئيا X_1 وحيد البعد في X ، وهذا الفضاء الجزئي مغلق وفق ٢-٤-٣ ، ومحتوى تماما في X نظرا لكون $\dim X = \infty$. واستنادا الى تمهيدية ريس ، فانه يوجد عنصر x_2 من X نظيمه 1 بحيث يكون

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

ان العنصرين x_1 و x_2 يولدان فضاء جزئيا X_2 ثنائي البعد مغلقا ومحتوى تماما في X . واستنادا الى تمهيدية ريس ، فانه يوجد عنصر x_3 من X نظيمه 1 بحيث أنه اذا كان x أي عنصر من X_2 فان

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}.$$

وبوجه خاص نجد أن

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2},$$

$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

وإذا تابعنا هذا بالتدرج نجد متتالية (x_n) من عناصر M بحيث أن

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2} \quad (m \neq n).$$

ومن الواضح أن (x_n) لا يمكن أن تكون متتالية جزئية متقاربة ، وهذا يناقض حقيقة كون M متراسة . لذا فإن افتراضنا بأن $\dim X = \infty$ غير صحيح ، وبالتالي فإن $\dim X < \infty$ ■

لهذه المبرهنة تطبيقات متنوعة ، وسنستخدمها في الفصل الثامن كأداة أساسية لدى دراستنا لما يسمى بالمؤثرات المتراسة .

إن أهمية المجموعات المتراسة تعود إلى « سلوكها الجيد » ، فإن لها خواص أساسية عديدة مشابهة لخواص المجموعات المنتهية ، وهذه الخواص لا تتمتع بها المجموعات غير المتراسة . وفيما يتعلق بالتطبيقات المستمرة ، فإن إحدى الخواص الرئيسية تنص على أن صور المجموعات المتراسة هي مجموعات متراسة ، الأمر الذي يشكل موضوع المبرهنة التالية .

٦-٥-٢ مبرهنة (التطبيق المستمر)

- ليكن X و Y فضاءين متريين و $T: X \longrightarrow Y$ تطبيقا مستمرا (١-٣-٣) .
عندئذ تكون صورة مجموعة جزئية متراسة M من X وفق T متراسة .

البرهان :

يكفي استنادا إلى تعريف التراص أن نبين بأن كل متتالية (y_n) في الصورة $T(M) = Y$ تحوي متتالية جزئية تتقارب في $T(M)$. بما أن $y_n \in T(M)$ ، فيوجد

عنصر x_n من M بحيث يكون $y_n = Tx_n$. ولما كانت M متراسة ، فإن (x_n) تحوي متتالية جزئية (x_{n_k}) تتقارب في M . ان صورة (x_{n_k}) هي متتالية جزئية من (y_n) ، وهذه المتتالية الجزئية لا بد أن تتقارب في $T(M)$ وفق ١-٤-٨ نظرا لكون T مستمرا . لذا فإن $T(M)$ متراسة . ■

نستنتج من هذه المبرهنة أن الخاصة التالية ، والمعروفة في نظرية الدوال الحقيقية لتغير حقيقي ، تظل صحيحة في الفضاءات المترية .

٧-٥-٢ نتيجة (القيمة العظمى والقيمة الصغرى)

ان التطبيق المستمر T لمجموعة جزئية متراسة M من فضاء متري X في الفضاء R يدرك قيمته العظمى وقيمه الصغرى في نقطتين من M .

البرهان :

ان المجموعة $T(M) \subset R$ متراسة وفق المبرهنة ٦-٥-٢ ، وهذه المجموعة مغلقة ومحدودة استنادا الى التمهيدية ٢-٥-٢ [لدى تطبيقها على $T(M)$] . لذا فان $\sup T(M) \in T(M)$ ، $\inf T(M) \in T(M)$ ، كما أن الصورتين العكسيتين لهاتين النقطتين تتألفان من تلك النقاط في M التي يدرك فيها Tx قيمة صغرى أو قيمة عظمى على الترتيب . ■

مسائل

- ١ - يبين أن R^n و C^n ليسا متراسين .
- ٢ - أثبت أن الفضاء المتري المنقطع (١-١-٨) المؤلف من عدد غير منته من النقاط ليس متراسا .
- ٣ - أورد أمثلة على منحنيات متراسة وأخرى غير متراسة في المستوي R^2 .
- ٤ - أثبت أنه كي تكون مجموعة جزئية غير منتهية M في الفضاء s (٢-٢-٨)

متراصة ، فمن الضروري وجود أعداد γ_1 و γ_2 و ... بحيث أنه إذا كان

$x = (x_k) \in M$ ، فإن $|x_k| \leq \gamma_k$ (يمكن البرهان على أن هذا الشرط كافٍ

أيضا كي تكون M متراصة) •

٥ - (التراص الوضعي) • نقول عن فضاء متري X انه متراص موضعيا

إذا وجد لكل نقطة من X جوار متراص • بين أن الفضاءين R و C بل

الفضاءين R و C متراصان موضعيا •

٦ - أثبت أن الفضاء المتري المتراص X متراص موضعيا •

٧ - إذا كان $\dim Y < \infty$ في تمهيدية ريس ٢-٥-٤ ، فأثبت أنه يمكن حينئذ

اختيار $\theta = 1$ أيضا •

٨ - يتن في المسألة ٧ من البند ٢-٤ بصورة مباشرة (ودون اللجوء الى

٢-٤-٥) أن هنالك عددا $a > 0$ بحيث أن $a \|x\|_2 \leq \|x\|$ (استخدم ٢-٥-٧) •

٩ - إذا كان X فضاء متريا متراصا ، وكانت M مجموعة جزئية مغلقة في X ،

فبين أن M متراصة •

١٠ - ليكن X و Y فضاءين متريين و X فضاء متراصا • برهن أنه إذا كان

$T: X \rightarrow Y$ تطبيقا متباينا وغامرا ومستمرا ، فإن T هوميومورفيزم

(المسألة ٥ من البند ٦-١) •

٦-٢ المؤثرات الخطية

ندرس في التحليل الحقيقي المحور الحقيقي R والدوال الحقيقية عليه (أو

على جزء من R) • من الواضح أن كلا من هذه الدوال هو تطبيق ساحته في

R • أما في التحليل الدالي فاننا ندرس فضاءات أعم ، مثل الفضاءات المترية

والفضاءات المنظمة ، والتطبيقات لهذه الفضاءات •

وفي حالة الفضاءات المتجهية ، وبوجه خاص ، الفضاءات المنظمة ، فان

التطبيق يدعى مؤثرا •

ثمة مؤثرات ذات أهمية خاصة لكونها « تحفظ » عمليتي الفضاء المتجهي الجبرتين ، الامر الذي يوضحه التعريف التالي .

١-٦-٢ تعريف (المؤثر الخطي)

المؤثر الخطي T هو مؤثر يحقق الشروط التالية :

- (i) الساحة $\mathcal{D}(T)$ للمؤثر T فضاء متجهي ، والمدى $\mathcal{R}(T)$ يقع في فضاء متجهي على الحقل نفسه .
- (ii) اذا كان x و y أي عنصرين من $\mathcal{D}(T)$ و α أي عدد فان

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

(1)

$$T(\alpha x) = \alpha Tx.$$

■

ويجدر بنا توجيه النظر الى الرموز المستعملة . فاننا نكتب Tx عوضا عن $T(x)$ ، وهذا التبسيط متفق عليه في التحليل الدالي . كذلك ، فاننا سنستعمل فيما تبقى من الكتاب الرموز التالية :

- $\mathcal{D}(T)$ للدلالة على ساحة T
- $\mathcal{R}(T)$ للدلالة على مدى T
- $N(T)$ للدلالة على الفضاء الصفري لـ T

والفضاء الصفري لـ T هو بالتعريف مجموعة كل العناصر x من $\mathcal{D}(T)$ التي تحقق الشرط $Tx = 0$. (وثمة كلمة أخرى تستعمل للدلالة على الفضاء الصفري هي « النواة » . الا أننا لن تتبنى هذه التسمية ، ذلك أننا سنحتفظ بها لغرض آخر في نظرية المعادلات التكاملية) .

علينا كذلك أن نقول شيئا عن استعمال الاسهم فيما يتعلق بالمؤثرات . ليكن $\mathcal{D}(T) \subset Y$ و $\mathcal{R}(T) \subset X$ حيث X و Y فضاءان متجهيان ، كلاهما حقيقي أو عقدي . عندئذ يكون T مؤثرا من $\mathcal{D}(T)$ (أي تطبيقا لـ $\mathcal{D}(T)$) على $\mathcal{R}(T)$ ، ونكتب

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathfrak{R}(T),$$

أو مؤثراً من $\mathfrak{D}(T)$ في Y ، ونكتب

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y.$$

وإذا كان $\mathfrak{D}(T)$ هو الفضاء الكلي X ، عندئذ (وعندئذ فقط) نكتب

$$T: X \longrightarrow Y.$$

ومن الواضح أن الشرطين (1) يكافئان الشرط

$$(2) \quad T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

فاذا أخذنا $\alpha = 0$ في (1) ، وجدنا الدستور التالي الذي نحتاج اليه مرارا في أبحاثنا المقبلة

$$(3) \quad T0 = 0.$$

يعبر الدستور (1) عن أن المؤثر الخطي T هو مومورفيزم (أو تشاكل) لفضاء متجهي (هو ساحة T) في فضاء متجهي آخر ، أي أن T تحفظ عمليتي الفضاء المتجهي بالمعنى التالي: نجري أولا في اليسار من (1) عملية فضاء متجهي (عملية الجمع أو عملية الضرب بعدد) ، ومن ثم نأخذ صورة المتجه الناتج وفق T في Y ، في حين أننا في اليمين من (1) ، نأخذ أولا صورتَي x و y وفق T في Y ، ومن ثم نجري عمليتي الفضاء المتجهي في Y ، وفي كلتا الحالين تكون النتيجة واحدة . ان هذه الخاصة تجعل المؤثرات الخطية تطبيقات هامة . كذلك ، فان أهمية الفضاءات المتجهية في التحليل الدالي تعزى بصورة أساسية للمؤثرات الخطية المعرفة عليها .

سنورد الآن أمثلة أساسية على المؤثرات الخطية ، ونترك للقارئ التحقق من خطية المؤثرات في كل حالة .

أمثلة

٢-٦-٢ المؤثر المطابق

- يعرف المؤثر المطابق $I_X: X \rightarrow X$ بالمساواة $I_X x = x$ أيًا كان x من X .
- سنكتب أيضًا I فقط للدلالة على I_X ، وعندئذ يكون $Ix = x$.

٣-٦-٢ المؤثر الصفري

- يعرف المؤثر الصفري $0: X \rightarrow Y$ بالمساواة $0x = 0$ أيًا كان x من X .

٤-٦-٢ المفاضلة

- ليكن X الفضاء المتجهي لكل الحدوديات على $[a, b]$. من الممكن أن نعرف مؤثرًا خطيًا T على X بأن نضع

$$Tx(t) = x'(t)$$

- أيًا كان x من X ، حيث تعني الفتحة فوق x مشتق x بالنسبة إلى t .
- والمؤثر T هنا هو تطبيق لـ X على X .

٥-٦-٢ الكاملة

- من الممكن تعريف مؤثر خطي T من $C[a, b]$ في $C[a, b]$ بالمساواة

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau \quad t \in [a, b].$$

٦-٦-٢ الضرب بـ t

- يمكن تعريف مؤثر خطي آخر T من $C[a, b]$ في $C[a, b]$ بالمساواة

$$Tx(t) = tx(t).$$

ويلعب هذا المؤثر دورا في الفيزياء (نظرية الكم) ، الامر الذي سنراه في الفصل الحادي عشر .

٧-٦-٢ جبر المتجهات الابتدائي

يحدد الجداء المتجهي عند تثبيت أحد المضروبين مؤثرا خطيا $T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ كذلك فان الجداء العددي يحدد عند تثبيت أحد المضروبين مؤثرا خطيا $T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، كأن يكون مثلا

$$T_2 x = x \cdot a = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3$$

حيث $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^3$ متجه مثبت .

٨-٦-٢ المصفوفات

تعرف المصفوفة الحقيقية $A = (\alpha_{jk})$ ، التي عدد أسطرها r وعدد اعمدتها n ، مؤثرا خطيا $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ عن طريق المساواة

$$y = Ax$$

حيث $x = (\xi_j)$ متجه ذو n من المركبات و $y = (\eta_j)$ متجه ذو r من المركبات ، وحيث يكتب هذان المتجهان على شكل متجهين عموديين ، الامر الذي يتفق مع الاجماع المألوف في ضرب المصفوفات . عندئذ يمكن كتابة المساواة $y = Ax$ بالشكل

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

ان T خطي نظرا لكون عملية ضرب المصفوفات خطية . واذا كانت A عقدية ، فانها تعرف مؤثرا خطيا من \mathbb{C}^n في \mathbb{C}^r . هذا وسنورد مناقشة مفصلة حول دور المصفوفات فيما يتعلق بالمؤثرات الخطية في البند ٩-٢ . ■

يمكننا التحقق بسهولة في هذه الامثلة بأن كلا من المدى والفضاء الصفري للمؤثرات الخطية الواردة هي فضاءات خطية . ان هذه حقيقة عامة ، ولا تقتصر على الامثلة السابقة ، وسنبرهن الآن على صحتها ، ونرى كيف يمكن الاستفادة من الخطية في البراهين البسيطة . أما المبرهنة نفسها ، فسيكون لها تطبيقات متنوعة في أبحاثنا المقبلة .

٩-٦-٢ مبرهنة (المدى والفضاء الصفري)

إذا كان T مؤثرا خطيا ، فإننا نجد ما يلي :

(أ) المدى $\mathcal{R}(T)$ هو فضاء متجهي .

(ب) إذا كان $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$ ، فإن $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

(ج) الفضاء الصفري $\mathcal{N}(T)$ هو فضاء متجهي .

البرهان :

(أ) نأخذ أي عنصرين y_1 و y_2 من $\mathcal{R}(T)$ ، ونبين أنه أيا كان الممددان α و β فإن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$. لما كان $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ ، فهناك عنصران $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ بحيث أن $y_1 = Tx_1$ و $y_2 = Tx_2$ ، كما أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{D}(T)$ نظرا لكون $\mathcal{D}(T)$ فضاء متجهيا . ان خطية T تقتضي أن يكون

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

اذن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$. وبما أن العنصرين y_1 و y_2 من $\mathcal{R}(T)$ كفيان ، وأن العددين α و β كفيان ، فإن $\mathcal{R}(T)$ فضاء متجهي حقا .

(ب) لنختار المتجهات y_1 و y_2, \dots, y_{n+1} من $\mathcal{R}(T)$ ، التي عددها $n+1$ ، بصورة كيفية . عندها توجد عناصر x_1 و \dots و x_{n+1} في $\mathcal{D}(T)$ بحيث أن $y_1 = Tx_1$ و $y_2 = Tx_2$ و \dots و $y_{n+1} = Tx_{n+1}$. ولما كان $\dim \mathcal{D}(T) = n$ ، فإن المجموعة $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ لا بد أن تكون مرتبطة خطيا . وبالتالي فإن

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

حيث $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ أعداد أحدها على الأقل مغاير للصفر . وبما أن T خطي وأن $T0=0$ ، فالتا نجد بتطبيق T على طرفي المساواة السابقة أن

$$T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

وهذا يبين أن $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ مجموعة مرتبطة خطيا لأن الأعداد α_i ليست مساوية للصفر معا . وإذا تذكرنا بأن هذه المجموعة الجزئية من $\mathcal{R}(T)$ اختيرت بصورة كيفية ، فالتا نستنتج أن $\mathcal{R}(T)$ لا يحوي مجموعة جزئية مستقلة خطيا مؤلفة من $n+1$ أو أكثر من العناصر ، وهذا يعني تعريفا أن $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

(ج) لنأخذ أي عنصرين x_1 و x_2 من $N(T)$. عندئذ يكون $Tx_1 = Tx_2 = 0$ وبما أن T خطي ، فالتا نجد أن

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0.$$

أيأ كان العدان α و β ، وهذا يبين بأن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$. وبالتالي فإن $N(T)$ فضاء متجهي . ■

وتجدر بنا الإشارة الى النتيجة المباشرة التالية من القسم (ب) من البرهان :

ان المؤثرات الخطية تحفظ الارتباط الخطي .

لنتقل الى عكس مؤثر خطي . نحن نذكر أولا بأنه يقال عن تطبيق $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ بأنه متباين اذا كان للنقاط المختلفة من ساحته صور مختلفة، أي أنه اذا كان $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ ، فإن

$$(4) \quad x_1 \neq x_2 \implies Tx_1 \neq Tx_2;$$

وهذا يكافئ قولنا أن

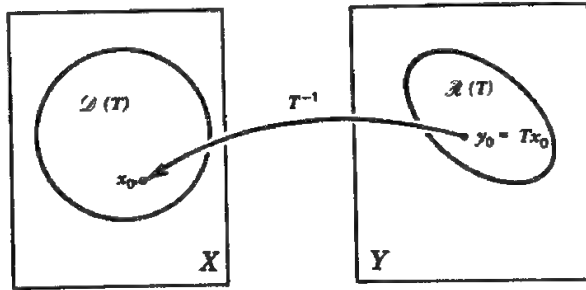
$$(4^*) \quad Tx_1 = Tx_2 \implies x_1 = x_2.$$

وفي هذه الحالة يوجد التطبيق

$$(5) \quad T^{-1}: \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$$

$$y_0 \longmapsto x_0 \quad (y_0 = Tx_0)$$

الذي ينقل كل نقطة y_0 في $\mathcal{R}(T)$ الى النقطة x_0 في $\mathcal{D}(T)$ بحيث يكون $Tx_0 = y_0$ (انظر الى الشكل (٢٠)). يسمى التطبيق T^{-1} التطبيق العكسي لـ T .



الشكل (٢٠). الرموز المتعلقة بالتطبيق العكسي

من الواضح أن (5) تقتضي

$$\begin{array}{ll} \text{أيا كان } x \text{ من } \mathcal{D}(T) & T^{-1}Tx = x \\ \text{أيا كان } y \text{ من } \mathcal{R}(T) & TT^{-1}y = y \end{array}$$

هذا ، ونقابل في صدد المؤثرات الخطية على الفضاءات المتجهة الوضع التالي: الشرط اللازم والكافي لوجود عكس مؤثر خطي هو أن يكون الفضاء الصفري للمؤثر مؤلفا من المتجه الصفري دون غيره . وبصورة أدق فانه يرد المعيار المفيد التالي الذي سنستعمله مرارا في أبحاثنا القادمة .

١٠-٦-٢ مبرهنة (المؤثر العكسي)

ليكن X و Y فضاءين متجهيين كلاهما حقيقي او عقدي ، وليكن $T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T)$

مؤثرا خطيا ساحته $\mathcal{D}(T) \subset X$ ومداه $\mathcal{R}(T) \subset Y$. عندئذ نجد ما يلي :

(أ) الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر العكسي $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathcal{D}(T)$ موجودا هو أن يكون

$$Tx=0 \implies x=0.$$

(ب) إذا كان T^{-1} موجودا ، فإنه مؤثر خطي .

(ج) إذا كان $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$ ، وكان T^{-1} موجودا ، فإن $\dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$

البرهان :

(أ) لنفترض أن $Tx=0$ تقتضي $x=0$. عندئذ نجد نظرا لكون T خطيا أن المساواة $Tx_1 = Tx_2$ تقتضي

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0,$$

وبالتالي فإن $x_1 - x_2 = 0$ استنادا الى الفرض . يترتب على هذا أن $Tx_1 = Tx_2$ تقتضي $x_1 = x_2$ ، وأن T^{-1} موجود استنادا الى (4*) . وبالعكس ، فإذا كان T^{-1} موجودا ، فإن (4*) صحيحة . نستنتج من (4*) عند وضع $x_2 = 0$ ومن (3) أن

$$Tx_1 = T0 = 0 \implies x_1 = 0.$$

وبذا يكتمل اثبات (أ) .

(ب) سنفترض أن T^{-1} موجود ، ونبين أن T^{-1} يكون عندئذ خطيا . إن ساحة T^{-1} هي $\mathcal{R}(T)$ ، وهي فضاء خطي استنادا الى الشق (أ) من المبرهنة ٩-٦-٢ . لנأخذ أي عنصرين x_1 و x_2 من $\mathcal{D}(T)$ وصورتيهما

$$y_2 = Tx_2 \quad \text{و} \quad y_1 = Tx_1$$

عندئذ يكون

$$x_2 = T^{-1}y_2 \quad \text{و} \quad x_1 = T^{-1}y_1$$

وبما أن T خطي ، فالتا نجد أنه أيا كان العددا α و β ، فان

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

ونظرا لكون $x_i = T^{-1} y_i$ ، فان

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$$

وهذا يثبت أن T^{-1} خطي .

(ج) لدينا اعتمادا على الشق (ب) من البرهنة ١١-٦-٢ المتباينة

$\dim \mathcal{R}(T) \leq \dim \mathcal{D}(T)$ والمتباينة $\dim \mathcal{D}(T) \leq \dim \mathcal{R}(T)$ اعتمادا على البرهنة عينها

لدى تطبيقها على T^{-1} .

سنورد الآن قاعدة مفيدة بشأن عكس مركب مؤثرين خطيين . (لعل

القارئ قد سبق وتعرف إليها في حال المصفوفات المربعة) .

١١-٦-٢ تمهيدية (عكس الجداء)

ليكن $T: X \rightarrow Y$ و $S: Y \rightarrow Z$ مؤثرين خطيين متباينين وغامرين ، حيث

Y و Z فضاءات متجهية (انظر الى الشكل ٢١) . عندئذ يكون العكس

$(ST)^{-1}: Z \rightarrow X$ للجداء ST (اي للمركب ST) موجودا ، ويكون

$$(6) \quad (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

البرهان :

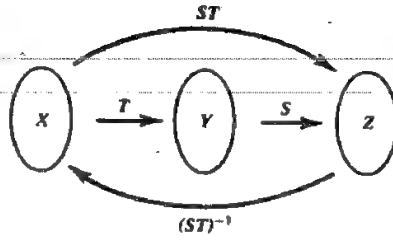
لما كان المؤثر $ST: X \rightarrow Z$ متباينا وغامرا ، فان $(ST)^{-1}$ موجود . لذا فان

$$ST(ST)^{-1} = I_Z$$

حيث I_Z هو المؤثر المطابق على Z . وبطبيق S^{-1} واستعمال $S^{-1}S = I_Y$

(حيث I_Y هو المؤثر المطابق على Y) ، فالتا نجد أن

$$S^{-1}ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}.$$



الشكل (٢١) • الرموز الواردة في التمهيدية ١١-٦-٢

فاذا طبقنا T^{-1} وأفدنا من أن $T^{-1}T = I_X$ ، فاننا نجد النتيجة المتبغاة وهي

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

وبذا يكتمل البرهان • ■

مسائل

- ١ - بين أن المؤثرات الواردة في ٢-٦-٢ و ٣-٦-٢ و ٤-٦-٢ خطية •
- ٢ - أثبت أن المؤثرات T_1, \dots, T_n من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R}^2 المعرفة كما يلي :

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (0, \xi_2)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, \xi_1)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2)$$

على التوالي ، هي مؤثرات خطية • أعط تأويلا هندسيا لكل منها •

- ٣ - حدد الساحة والمدى والفضاء الصفري لكل من المؤثرات T_1, T_2 في المسألة ٢ •

- ٤ - ما هو الفضاء الصفري للمؤثر T_3 في المسألة ٢ ، وللمؤثرين T_1 و T_2 في ٧-٦-٢ ، وللمؤثر T في ٤-٦-٢ ؟

٥ - ليكن $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا . بين أن الصورة لفضاء جزئي V من X هي فضاء متجهي ، وأنه كذلك تكون الصورة العكسية لفضاء جزئي W من Y .

٦ - إذا كان جداء (مركب) مؤثرين خطيين موجودا ، فبين أنه خطي .

٧ - (الخاصة التبديلية) ليكن X فضاء متجهيا و $S: X \rightarrow X$ و $T: X \rightarrow X$ أي مؤثرين . نقول عن S و T انهما تبديليان إذا كان $ST=TS$ ، أي إذا كان $(ST)x=(TS)x$ أيا كان x من X . هل نستنتج من هذا التعريف أن T_1 و T_2 من المسألة ٢ تبديليان ؟

٨ - اكتب المؤثرين في المسألة ٢ مستعملا مصفوفات 2×2 .

٩ - اكتب $y = Ax$ في ٢-٦-٨ بدلالة المركبات ، وبين أن T خطي ، ثم أعط أمثلة على ذلك .

١٠ - أورد صياغة للشرط الوارد في (أ) من ٢-٦-١٠ بدلالة الفضاء الصفري $T=0$.

١١ - ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل المصفوفات المربعة 2×2 ، ولنعرف $T: X \rightarrow X$ بالمساواة $Tx = bx$ ، حيث b عنصر مثبت في X ، وحيث نرمز بـ bx الى الجداء المألوف لمصفوفتين . بين أن T خطي . حدد شروط وجود T^{-1} .

١٢ - هل عكس المؤثر T في ٢-٦-٤ موجود ؟

١٣ - ليكن $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا عكسه موجود . فإذا كانت $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا في $\mathcal{D}(T)$ ، فبين بأن المجموعة $\{Tx_1, \dots, Tx_n\}$ تكون مستقلة خطيا .

١٤ - إذا كان $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا وكان $\dim X = \dim Y = n < \infty$ ، فأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\mathcal{D}(T) = Y$ هو أن يكون T^{-1} موجودا .

١٥ - لنأخذ الفضاء المتجهي X المؤلف من جميع الدوال الحقيقية المعرفة على \mathbb{R}

والتي لها مشتقات من جميع المراتب في كل نقطة من \mathbb{R} ، ولنعرف
 $T: X \rightarrow X$ بالمساواة $y(t) = Tx(t) = x'(t)$. أثبت أن $\mathcal{D}(T)$ يساوي X
 بأكمله ، إلا أن T^{-1} ليس موجودا . قارن هذا بالمسألة ١٤ واعط التعليق
 المناسب .

٧-٢ المؤثرات الخطية المحدودة والمستمرة

لعل القارئ قد لاحظ أننا لم نستعمل النظم في البند السابق كله . أما
 الآن فسندخل النظم في اعتبارنا ، وذلك في التعريف الاساسي التالي .

١-٧-٢ تعريف (المؤثر الخطي المحدود)

ليكن X و Y فضاءين منظمين ، وليكن $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا حيث
 $\mathcal{D}(T) \subset X$. نقول عن المؤثر T انه محدود اذا وجد عدد حقيقي c بحيث
 تتحقق المتباينة

$$(1) \quad \|Tx\| \leq c\|x\|.$$

أيا كان x من $\mathcal{D}(T)$.

ان النظم الوارد في الطرف الايسر من (1) هو ذاك المعرف على Y ، كما
 ان النظم في الطرف الايمن هو ذاك المعرف على X . وقد رمزنا لكلا النظمين
 بصيغة واحدة $\|\cdot\|$ وذلك بقصد التبسيط ، ودون أن يكون ثمة أي خطر
 للبس . ان التمييز باستعمال الادلة الدنيا ($\|x\|_0$ و $\|Tx\|_1$ و ...) يبدو غير
 ضروري هنا . ويبين الدستور (1) أن المؤثر الخطي المحدود ينقل المجموعات
 المحدودة في $\mathcal{D}(T)$ الى مجموعات في محدودة Y . وهذا ما حدا بالباحثين
 لتبني تسمية « المؤثر المحدود » .

تحذير :

تجدر الإشارة في هذا الصدد الى أن استعمالنا هنا للكلمة « محدود » مغاير لاستعمالنا لها في التحليل الحقيقي ، حيث نعني بالدالة المحدودة الدالة التي يكون مداها مجموعة محدودة . ومن سوء الحظ ، فكل المصطلحين شائع الاستعمال ، بيد أن خطر اللبس ليس بالكبير .

ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد c بحيث تبقى (1) صحيحة أيا كان العنصر غير الصفري x من $\mathcal{D}(T)$ ؟ [من الممكن إهمال $x=0$ لأن $Tx=0$ عندما يكون $x=0$ استنادا الى (3) من ٦-٢] . إذا قسمنا طرفي (1) على $\|x\|$ نجد أن

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \quad (x \neq 0)$$

وهذا يبين أن كبر c يجب أن يكون على الأقل بقدر الحد الأعلى للعبارة الواردة في اليسار عندما تسمح x المجموعة $\mathcal{D}(T) - \{0\}$. لذا فإن الإجابة عن سؤالنا حول أصغر قيمة ممكنة تأخذها c في (1) هي أنها الحد الأعلى . فإذا رمزنا لهذه الكمية بـ $\|T\|$ ، فإن

$$(2) \quad \|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} .$$

يسمى $\|T\|$ تنظيم المؤثر T . وإذا كان $\mathcal{D}(T) = \{0\}$ ، فالتنا نكتب $\|T\| = 0$ تعريفاً . وفي هذه الحالة (غير الهامة نسبياً) يكون $T=0$ لأن $T0=0$ استنادا الى (3) من البند ٦-٢ .

لاحظ أن (1) يمكن أن تكتب بعد وضع $c = \|T\|$ بالشكل

$$(3) \quad \|Tx\| \leq \|T\| \|x\| .$$

وسنستعمل هذه الصيغة مرارا في أبحاثنا المقبلة .

وبالطبع . فمن الضروري تيرير استعمال كلمة « التنظيم » في هذا الصدد ، الامر الذي تقوم به التمهيدية التالية .

٢-٧-٢ تمهيدية (التنظيم)

ليكن T مؤثرا خطيا محدودا كما عرفناه في ١-٧-٢ . عندئذ نجد ما يلي :

(١) ثمة صيغة بديلة لتنظيم T محددة بالدستور

$$(4) \quad \|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{Q}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

(ب) يحقق التنظيم المعرف بالمساواة (2) الشروط (١أ) - (١ب) من البند ٢-٢ .

البرهان :

(١) اذا افترضنا أن $\|x\|=a$ وأن $y=(1/a)x$ ، حيث $x \neq 0$ ، فاننا نجد أن $\|y\|=\|x\|/a=1$ ، وأنه يترتب على (2) بسبب خطية T أن

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{Q}(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a} \|Tx\| = \sup_{\substack{y \in \mathcal{Q}(T) \\ y \neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{a}x\right) \right\| = \sup_{\substack{y \in \mathcal{Q}(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

واذا كتبنا x عوضا عن y في الطرف الايسر ، فاننا نجد (4) .

(ب) ان صحة (١أ) أمر واضح ، وكذلك صحة المساواة $\|0\|=0$. ويترب على $\|T\|=0$ أن $Tx=0$ أيا كان x من $\mathcal{Q}(T)$ ، وبالتالي فإن $T=0$ ، الامر الذي يبين صحة (٢أ) . فضلا عن ذلك ، فان الشرط (٣) ينتج من

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

حيث $x \in \mathcal{D}(T)$ • وأخيرا فان (ن) هو نتيجة من

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|:$$

حيث يكون x هنا عنصرا من $\mathcal{D}(T)$ • ■

وقبل الشروع في دراسة الخواص العامة للـ T الخطية المحدودة ، فاننا سنلقي نظرة على بعض الامثلة السودجية ، الامر الذي يعطينا احساسا أفضل بفهم المؤثر الخطي المحدود •

امثلة

٢-٧-٢ المؤثر المطابق

ان المؤثر المطابق $I: X \rightarrow X$ على فضاء منظم $X \neq \{0\}$ محدود ونظيـمه
• $\|I\| = 1$ (٢-٦-٢)

٤-٧-٢ المؤثر الصفري

ان المؤثر الصفري $0: X \rightarrow Y$ على فضاء منظم X محدود ونظيـمه
• $\|0\| = 0$ (٣-٦-٢)

٥-٧-٢ مؤثر المفاضلة

ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من كل الحدوديات على $J = [0, 1]$ ، حيث
النظيم معطى بالمساواة $\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$ و يعرف مؤثر المفاضلة T على
بالمساواة

$$Tx(t) = x'(t)$$

حيث ترمز إشارة الفتح الى المفاضلة بالنسبة الى t . هذا المؤثر خطي وليس محدودا ، وذلك لانه اذا أخذنا $x_n(t) = t^n$ ، حيث $n \in \mathbb{N}$ ، فان $\|x_n\| = 1$ ، كما أن

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = nt^{n-1}$$

وبالتالي ، فان $\|Tx_n\| = n$ و $\|Tx_n\|/\|x_n\| = n$. ولما كان العدد الطبيعي n كيفيا ، فاننا نكون قد أثبتنا عدم وجود عدد مثبت c بحيث يكون $\|Tx_n\|/\|x_n\| \leq c$. نستنتج من هذا ومن (1) أن T ليس محدودا .

بما أن المفاضلة عملية هامة ، فان نتيجتنا تبين بأن المؤثرات غير المحدودة هي أيضا ذات أهمية تطبيقية . وسنرى حقيقة هذا الامر في الفصلين العاشر والحادي عشر ، وذلك بعد أن نقوم بدراسة تفصيلية لنظرية المؤثرات المحدودة ولتطبيقاتها ، والتي هي أبسط من المؤثرات غير المحدودة .

٦-٧-٢ المؤثر التكاملي

يمكننا تعريف مؤثر تكاملي $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ بالمساواة $y = Tx$ حيث

$$y(t) = \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

وحيث k هي دالة معطاة ، تسمى نواة المؤثر T ، ويفترض فيها أن تكون مستمرة على المربع المغلق $G = J \times J$ في المستوى τ ، حيث $J = [0, 1]$. أن هذا المؤثر محدود .

لإثبات هذا نلاحظ أولا أن استمرار k على المربع المغلق يقتضي محدودية k ، ولنفترض مثلا أن $|k(t, \tau)| \leq k_0$ أي كان (t, τ) من G ، حيث k_0 عدد حقيقي . وفضلا عن ذلك ، فان

$$|x(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| = \|x\|.$$

لذا فان

$$\begin{aligned}\|y\| = \|Tx\| &= \max_{t \in J} \left| \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \max_{t \in J} \int_0^1 |k(t, \tau)| |x(\tau)| d\tau \\ &\leq k_0 \|x\|.\end{aligned}$$

وهذه النتيجة $\|Tx\| \leq k_0 \|x\|$ ليست سوى (1) حيث $c = k_0$. لذا فان T محدود .

٧-٧-٢ المصفوفة

تعرف المصفوفة الحقيقية $A = (a_{jk})$ التي عدد أسطرها r وعدد أعمدها n مؤثرا $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ عن طريق المساواة

$$(5) \quad y = Ax$$

حيث $x = (\xi_j)$ و $y = (\eta_j)$ متجهان عموديان عدد مركباتهما n و r على الترتيب ، وحيث استعملنا ضرب المصفوفات كما في ٢-٦-٨ . وتصبح المساواة (5) لدى استعمالنا للمركبات على النحو التالي

$$(5') \quad \eta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \quad (j=1, \dots, r).$$

ان T خطي نظرا لكون ضرب المصفوفات عملية خطية .
ان T محدود كذلك .

لأثبت هذا ، نذكر أولا من ٢-٢-٢ أن التنظيم على \mathbb{R}^n يعطى بالمساواة

$$\|x\| = \left(\sum_{m=1}^n \xi_m^2 \right)^{1/2};$$

ونجد تنظيم y من \mathbb{R}^r بصورة مماثلة . وهكذا فانه يترتب على (5') وعلى متباينة كوشي - شقارتز (11) من البند ٢-١ أن

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \sum_{j=1}^r \eta_j^2 = \sum_{j=1}^r \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k \right]^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^r \left[\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^n \xi_m^2 \right)^{1/2} \right]^2 \\ &= \|x\|^2 \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2.\end{aligned}$$

وإذا لاحظنا أن المجموع المزدوج في السطر الأخير لا يتعلق بـ x ، فيمكن كتابة
نتيجتنا بالشكل

$$c^2 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2 \quad \text{حيث} \quad \|Tx\|^2 \leq c^2 \|x\|^2$$

وبذا نجد (1) ، الأمر الذي يكمل البرهان على أن T محدود . ■

هذا ، وسنعرض لدراسة دور المصفوفات في المؤثرات الخطية في بند
منفصل (البند ٢-٩) . أن المحدودية خاصة نموذجية ، وهي تبسيط أساسي
يرد في حالة البعد المنتهي كما نرى في المبرهنة التالية .

٢-٧-٨ مبرهنة (البعد المنتهي)

إذا كان الفضاء المنظم X منتهي البعد ، فإن كل مؤثر خطي على X محدود .

البرهان :

لنفترض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X . لنأخذ أي عنصر
 $x = \sum \xi_j e_j$ ، ولننظر في أي مؤثر خطي T على X . لما كان T خطيا فإن

$$\|Tx\| = \left\| \sum \xi_j T e_j \right\| \leq \sum |\xi_j| \|T e_j\| \leq \max_k \|T e_k\| \sum |\xi_j|$$

(يتم الجمع من 1 إلى n) . وبطبيق التمهيد ٢-٤-١ على المجموع الأخير
مفترضين أن $a_j = \xi_j$ و $x_j = e_j$ ، نجد أن

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|.$$

نستنتج مما سبق أن

$$\gamma = \frac{1}{c} \max_k \|T e_k\| \quad \text{حيث} \quad \|Tx\| \leq \gamma \|x\|$$

ويترتب على هذا وعلى (1) أن T محدود .

سنتناول الآن بالدرس خواص عامة وهامة للمؤثرات الخطية المحدودة .
المؤثرات هي تطبيقات ، وبالتالي فإن تعريف الاستمرار (٣-٣-١) ينطبق عليها .

ومن الحقائق الاساسية المتعلقة بالمؤثرات الخطية أن الاستمرار والمحدودية يقدوان مفهومين متكافئين ، وهاكم التفصيل .

ليكن $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ أي مؤثر ، ليس بالضرورة خطيا ، حيث $\mathcal{D}(T) \subset X$ ،
وحيث X و Y فضاءان منظمان . ان التعريف ٣-٣-١ يقتضي بأن المؤثر T يكون مستمرا في النقطة x_0 من $\mathcal{D}(T)$ اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ بحيث يكون

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon \quad \text{اذا كان } x \text{ من } \mathcal{D}(T) \text{ المحقق للشرط } \|x - x_0\| < \delta$$

ويكون T مستمرا اذا كان T مستمرا في كل نقطة x من $\mathcal{D}(T)$.
واذا كان T خطيا فاننا نجد المبرهنة الشهيرة التالية :

٩-٧-٢ مبرهنة (الاستمرار والمحدودية)

ليكن $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا* ، حيث $\mathcal{D}(T) \subset X$ ، وحيث X و Y فضاءان منظمان . عندئذ نجد التالي :

* تحذير : مما يؤسف له ان بعض المؤلفين يطلقون على المؤثرات الخطية المستمرة اسم « المؤثرات الخطية » . اما نحن فلن نتبنى هذا المصطلح ، ذلك ان ثمة مؤثرات خطية ذات اهمية من وجهة النظر التطبيقية دون ان تكون هذه المؤثرات مستمرة . وقد اوردنا مثالا على هذا في ٥-٧-٢ ، كما سنورد مؤثرات اخرى في الفصلين العاشر والحادي عشر .

(أ) الشرط اللازم والكافي كي يكون T مستمرا هو ان يكون محدودا .

(ب) اذا كان T مستمرا في نقطة واحدة فقط ، فانه مستمر .

البرهان :

(٦) ان هذه الدعوى واضحة للعيان في الحالة $T=0$. لنفترض الآن ان

$T \neq 0$. عندئذ يكون $\|T\| \neq 0$. سنفترض أولا ان T محدود ، ولناخذ أي

عصر x_0 من $\mathcal{D}(T)$. ليكن ε أي عدد موجب . عندئذ نجد بسبب كون T

خطيا أنه اذا كان x أي عنصر من $\mathcal{D}(T)$ يحقق الشرط

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|} \quad \text{حيث} \quad \|x - x_0\| < \delta$$

فان

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \|T\| \delta = \varepsilon.$$

وبما أن $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ عنصر اختياري ، فاننا نستنتج أن T مستمر .

وبالعكس ، لنفترض أن T مستمر في نقطة اختيارية x_0 من $\mathcal{D}(T)$. عندئذ

نجد أنه اذا كان $\varepsilon > 0$ عددا معطى ، فيوجد عدد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتباينة

$$(6) \quad \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$$

أيما كان العنصر x من $\mathcal{D}(T)$ الذي يحقق $\|x - x_0\| \leq \delta$. لناخذ الآن أي $v \neq 0$ في

$\mathcal{D}(T)$ ، ولنضع $x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$. عندئذ يكون $\|x - x_0\| = \delta$ الامر الذي يسمح لنا

باستعمال (6) . ولما كان T خطيا ، فاننا نجد

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\|$$

وعندئذ يترتب على (6) أن

$$\bullet \quad \|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\| \quad \text{اذن فان} \quad \bullet \quad \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\| \leq \varepsilon$$

فاذا لاحظنا أن المتباينة الأخيرة تكتب بالشكل $\|Ty\| \leq c\|y\|$ ، حيث $c = \varepsilon \delta$ ،
فاننا نستنتج أن T محدود .

(ب) ان استمرار T في نقطة يقتضي محدودية T استنادا الى القسم
الثاني من برهان (أ) ، وهذا بدوره يقتضي استمرار T وفق (أ) . ■
١٠-٧-٢ نتيجة (الاستمرار ، الفضاء الصفري)

اذا كان T مؤثرا خطيا محدودا فان :

$$(1) \quad x_n \rightarrow x \quad [\text{حيث } x_n, x \in \mathcal{D}(T)] \quad \text{يقتضي} \quad Tx_n \rightarrow Tx$$

(ب) الفضاء الصفري $N(T)$ مغلق .

البرهان :

(أ) ان هذا الشق ينتج من (أ) من البرهنة ٩-٧-٢ ومن البرهنة
٨-٤-١ معا أو مباشرة من (3) ، ذلك أنه عندما $n \rightarrow \infty$ فاننا نجد أن

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

(ب) يوجد لكل $x \in \overline{N(T)}$ متتالية (x_n) في $N(T)$ بحيث أن $x_n \rightarrow x$
[راجع (أ) من ٦-٤-١] . لذا فان $Tx_n \rightarrow Tx$ استنادا الى (أ) من هذه
النتيجة . كذلك ، فان $Tx = 0$ لان $Tx_n = 0$ ، وهذا يقتضي أن يكون
 $x \in N(T)$. وبما أن x عنصر اختياري من $\overline{N(T)}$ ، فان $N(T)$ مغلق . ■

وتجدر بنا ملاحظة أن مدى مؤثر خطي محدود قد لا يكون مغلقا . (راجع
المسألة ٦) .

ونترك للقارئ تقديم برهان بسيط لدستور مفيد آخر ، ألا وهو

$$(7) \quad \|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|, \quad \|T^n\| \leq \|T\|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

حيث $T_1: Y \rightarrow Z$ و $T_2: X \rightarrow Y$ و $T: X \rightarrow X$ مؤثرات خطية
محدودة ، وحيث X و Y و Z فضاءات منظمة .

المؤثرات هي تطبيقات ، وقد أوردنا لدى بحثنا للمؤثرات بعض المفاهيم الناتجة عن كون المؤثر تطبيقا ، نذكر منها الساحة ، والمدى ، والفضاء الصفري لمؤثر . وسنضيف الآن مفهومي آخرين (المقصور والممدد) . وكان بإمكاننا فعل ذلك في مرحلة أبكر ، إلا أننا فضلنا أرجاء ذلك الى الآن ، حيث يمكننا أن نورد مباشرة مبرهنة هامة (١١-٧-٢) . لنبتدىء بتعريف تساوي مؤثرين على النحو التالي :

نقول عن مؤثرين T_1 و T_2 انها متساويان ، ونكتب

$$T_1 = T_2,$$

إذا كان لهما ساحة واحدة ، أي إذا كان $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ ، وكان $T_1x = T_2x$ أيما كان x من $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$.

ان مقصور مؤثر $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ على مجموعة جزئية B من $\mathcal{D}(T)$ يرمز اليه بالشكل

$$T|_B$$

وهو المؤثر المعروف بالشكل

$$T|_B: B \rightarrow Y \text{ حيث } T|_Bx = Tx \text{ أيما كان } x \text{ من } B .$$

وممدد مؤثر T الى مجموعة M تحوي $\mathcal{D}(T)$ هو مؤثر

$$\tilde{T}: M \rightarrow Y \text{ بحيث أن } \tilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$$

أي أن $\tilde{T}x = Tx$ أيما كان x من $\mathcal{D}(T)$. [لذا فإن T مقصور \tilde{T} على $\mathcal{D}(T)$] .
إذا كانت $\mathcal{D}(T)$ مجموعة جزئية محتواة تماما في M ، فانه يوجد لمؤثر معطى T عدة ممددات . ومن الممددات ذات الاهمية التطبيقية هي تلك التي تحفظ خاصية أساسية محددة ، كخاصة الخطية مثلا (إذا اتفق وكان T خطيا) ،

أو خاصة المحدودية (إذا كانت $\mathcal{D}(T)$ واقعة في فضاء منظم وكان T محدودا) .
 والمبرهنة الهامة التالية نموذجية في هذا الصدد ، إذ أنها تعنى بسدد مؤثر خطي
 محدود T الى اللصاقة $\overline{\mathcal{D}(T)}$ للساحة ، بحيث يكون المؤثر المسدد محدودا أو
 خطيا أيضا ، وحتى له التنظيم نفسه . ان هذا يشمل حالة التمديد من مجموعة
 كثيفة في فضاء منظم X الى الفضاء X كله . وهو يشمل أيضا حالة التمديد من
 فضاء منظم X الى اتمامه (٢-٣-٢) .

١١-٧-٢ مبرهنة (الممد الخطي المحدود)

ليكن

$$T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$$

مؤثرا خطيا محدودا ، حيث $\mathcal{D}(T)$ واقعة في فضاء منظم X ، وحيث Y فضاء
 باناخ . عندئذ يوجد للمؤثر T ممد هو

$$\bar{T}: \overline{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow Y$$

حيث \bar{T} مؤثر خطي محدود نظيمه

$$\|\bar{T}\| = \|T\|.$$

البرهان :

ليكن x أي عنصر من $\overline{\mathcal{D}(T)}$. نرى استنادا الى (١) من المبرهنة ١-٤-٦
 أنه توجد متتالية (x_n) في $\mathcal{D}(T)$ بحيث أن $x_n \longrightarrow x$. ولما كان T خطيا
 ومحدودا ، فإن

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

وهذا يبين أن (Tx_n) هي متتالية لكوشي ، نظرا لكون (x_n) متقاربة . وبما أن
 Y تام فرضا ، فإن (Tx_n) متقاربة ، ولنفترض مثلا أن

$$Tx_n \longrightarrow y \in Y.$$

لتعرف الآن مؤثرا \bar{T} بالمساواة

$$\bar{T}x = y.$$

سنبين أن هذا التعريف مستقل عن الطريقة التي نختار بها المتتالية في $\mathcal{D}(T)$ المقاربة من x . لذا نأخذ متتاليتين x_n و z_n بحيث أن $x_n \rightarrow x$ و $z_n \rightarrow x$. عندئذ نلاحظ أن $x \rightarrow v_m$ ، حيث (v_m) هي المتتالية

$$(x_1, z_1, x_2, z_2, \dots).$$

يترتب على هذا أن (Tv_m) تتقارب اعتمادا على (أ) من ٣-٧-١* ، وبالتالي ، فانه يجب أن يوجد للمتتاليتين الجزئيتين (Tx_n) و (Tz_n) من المتتالية (Tv_m) نهاية واحدة ، وهذا يثبت أنه توجد صورة وحيدة لكل عنصر x من $\overline{\mathcal{D}(T)}$ وفق \bar{T} .

ولا كان واضحا أن \bar{T} خطي وأن $\bar{T}x = Tx$ أيا كان x من $\mathcal{D}(T)$ ، فان \bar{T} ممدد للمؤثر T . فاذا أفدنا الآن من المتباينة

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$$

وجعلنا $n \rightarrow \infty$ ، فاننا نجد أن $Tx_n \rightarrow y = \bar{T}x$. وبما أن $\|x\| \rightarrow x$ يعرف تطبيقا مستمرا (٢-٢) فاننا نجد أن

$$\|\bar{T}x\| \leq \|T\| \|x\|.$$

لذا فان \bar{T} محدود و $\|\bar{T}\| \leq \|T\|$. وبالطبع فان $\|\bar{T}\| \geq \|T\|$ بسبب كون التنظيم (المعرف على أنه الحد الاعلى) لا يمكن أن ينقص لدى تمديده . نخلص من كل هذا الى أن $\|\bar{T}\| = \|T\|$. ■

* لا يجوز هنا الحكم على تقارب (Tv_m) استنادا الى الشق (أ) من النتيجة ٢-٧-١ ، ذلك أنه كي يصح تطبيق هذه النتيجة ، لابد أن تكون النهاية x للمتتالية (v_m) منتبئة الى $\mathcal{D}(T)$ ، في حين انها ليست كذلك بالضرورة لانتماء x الى $\overline{\mathcal{D}(T)}$. لذا وجب هنا اتباع طريق آخر في اثبات تقارب (Tv_m) ، ولكن مثلا ذلك الذي اتبعناه قبل قليل لدى اثبات تقارب (Tx_n) من y . (الترجم)

مسائل

- ١ - أثبت صحة (7) .
- ٢ - ليكن X و Y فضاءين منظمين . أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي $T: X \rightarrow Y$ محدودا هو أن تكون الصور المباشرة للمجموعات المحدودة في X وفق T هي مجموعات محدودة في Y .
- ٣ - إذا كان $T \neq 0$ مؤثرا خطيا محدودا ، فبين أنه إذا كان x أي عنصر من $\mathcal{R}(T)$ يحقق الشرط $\|x\| < 1$ ، فإنه تصح المتباينة $\|Tx\| < \|T\|$.
- ٤ - هاتِ برهانا مباشرا على صحة (ب) من ٢-٧-٩ دون الافادة من (أ) في ٢-٧-٩ .
- ٥ - بين أن المؤثر $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ المعرف بالدستور $y = (y_j) = Tx$ ، حيث $y_j = \xi_j / j$ و $x = (\xi_j)$ هو مؤثر خطي ومحدود .
- ٦ - (المدى) . أثبت أنه ليس من الضروري أن يكون المدى $\mathcal{R}(T)$ لمؤثر خطي ومحدود $T: X \rightarrow Y$ مغلقا في Y . إرشاد . استعمل T الوارد في المسألة ٥ .
- ٧ - (المؤثر العكسي) . ليكن T مؤثرا خطيا محدودا من فضاء منظم X على فضاء منظم Y . فإذا وجد عدد موجب b بحيث أن $\|Tx\| \geq b\|x\|$ أيما كان x من X فبين أن $T^{-1}: Y \rightarrow X$ يكون عندئذ موجودا ومحدودا .
- ٨ - بين أن المؤثر العكسي $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ لمؤثر خطي $T: X \rightarrow Y$ محدود ، ليس محدودا بالضرورة . إرشاد . استعمل T الوارد في المسألة ٥ .
- ٩ - لنفترض أن $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ مؤثر معرف بالمساواة

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

حدد كلا من $\mathcal{R}(T)$ و $\mathcal{R}(T) \rightarrow C[0, 1]$ ، ثم قرر ما اذا كان T^{-1} خطيا ومحدودا .

١٠- لنعرف على $C[0, 1]$ المؤثر S المحدد بالمساواة

$$y(s) = s \int_0^1 x(t) dt,$$

$$y(s) = sx(s), \quad \text{والمؤثر } T \text{ بالمساواة}$$

هل S و T تبديليان ؟ عين كلا من $\|S\|$ و $\|T\|$ و $\|ST\|$ و $\|TS\|$.

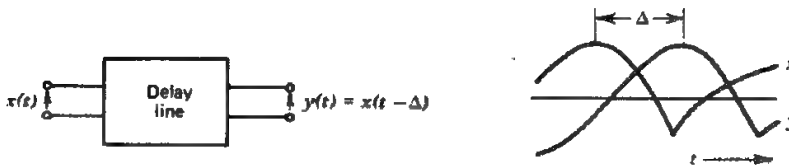
١١- ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من جميع الدوال الحقيقية والمحدودة على \mathbb{R} ، حيث التنظيم معرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|,$$

وليكن المؤثر $T: X \rightarrow X$ معرفا بالمساواة

$$y(t) = Tx(t) = x(t - \Delta)$$

حيث $\Delta > 0$ ثابت . [ان هذا أنموذج (موديل) لخط تاخير ، وهو جهاز كهربائي مخرجه y متأخر عن المدخل x ، وزمن التأخر هو Δ ، انظر الى الشكل ٢٢] . هل T خطي ؟ هل هو محدود ؟



الشكل (٢٢) . خط التأخير الكهربائي

١٢- (المصفوفات) • رأينا في ٧-٧-٢ أن المصفوفة $A = (a_{jk})$ من المرتبة $r \times n$ تعرف مؤثرا خطيا من الفضاء المتجهي X المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد في الفضاء المتجهي Y المؤلف من كل المرتبات r من الاعداد • لنفترض أننا عرفنا على X نظيما ما $\|\cdot\|_2$ وعلى Y نظيما ما $\|\cdot\|_1$ • نحن نذكر أن المسألة ١٠ من البند ٢-٤ تؤكد وجود نظائم مختلفة على الفضاء Z المؤلف من كل هذه المصفوفات (حيث ثبتنا r و n) • نقول عن تنظيم $\|\cdot\|_2$ على Z انه منسجم مع $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ اذا كان

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \|x\|_1.$$

بين أن التنظيم المعرف بالمساواة

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

منسجم مع $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ • وغالبا ما يطلق على هذا التنظيم اسم **التنظيم الطبيعي المعرف بالتظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$** • اذا اخترنا $\|x\|_1 = \max |\xi_j|$ و $\|y\|_2 = \max |\eta_j|$ ، فبين أن التنظيم الطبيعي هو

$$\|A\| = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|.$$

١٣- بين أنه يمكننا في ٧-٧-٢ ، حيث $r=n$ ، أن نعرف نظيما منسجما بالمساواة

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right)^{1/2},$$

الا أن هذا التنظيم في الحالة $n > 1$ ليس هو التنظيم الطبيعي المعرف بالتنظيم الاقليدي على \mathbb{R}^n •

١٤- اذا اخترنا في المسألة ١٢

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|y\|_2 = \sum_{j=1}^m |y_j|.$$

فبين أنه يمكن تحديد تنظيم منسجم بالمساواة

$$\|A\| = \max_k \sum_{j=1}^m |\alpha_{jk}|.$$

١٥- بين أنه في الحالة $r=n$ ، فإن التنظيم الوارد في المسألة ١٤ هو التنظيم الطبيعي المتوافق مع التنظيمين $\| \cdot \|_1$ و $\| \cdot \|_2$ المعرفين في المسألة المذكورة .

٨-٢ الداليات الخطية

الدالي هو مؤثر يقع مداه في المحور الحقيقي \mathbb{R} أو في المستوي العقدي \mathbb{C} . ولم يكن التحليل الدالي في بداياته يعني بغير تحليل الداليات . ولما كانت الداليات ترد كثيرا في موضوعنا ، فالتنا سنستعمل رموزا خاصة بها . سنرمز للداليات نفسها بأحرف لاتينية صغيرة f و g و h و \dots ، ولساحة الدالي f بـ $\mathcal{D}(f)$ ، ومداه بـ $\mathcal{R}(f)$ ، ولقيمة f في نقطة x من $\mathcal{D}(f)$ بـ $f(x)$ ، حيث نضع x بين قوسين .

وبما أن الداليات هي مؤثرات ، فإن كل التعاريف السابقة المتعلقة بالمؤثرات تسري على الداليات . وبوجه خاص ، فالتنا سنحتاج الى التعريفين التاليين نظرا لكون أغلب الداليات التي سنعامل معها في أبحاثنا المقبلة خطية ومحدودة .

٨-٢-١ تعريف (الدالي الخطي)

الدالي الخطي f هو مؤثر خطي ، تقع ساحته في فضاء متجهي X ، ومداه في الحقل العددي K للفضاء X . وهكذا فإن

$$f: \mathcal{D}(f) \longrightarrow K,$$

حيث $K = \mathbb{R}$ إذا كان X حقيقيا ، و $K = \mathbb{C}$ إذا كان X عقديا . ■

٢-٨-٢ تعريف (الدالي الخطي المحدود)

الدالي الخطي المحدود f هو مؤثر خطي محدود (٢-٧-١) ، يقع مداه في الحقل العددي للفضاء المنظم X الذي تقع فيه الساحة $\mathcal{D}(f)$. لذا فهناك عدد حقيقي c بحيث أنه أيا كان x من $\mathcal{D}(f)$ فإن

$$(1) \quad |f(x)| \leq c \|x\|.$$

وفضلا عن ذلك ، فإن تنظيم f هو [راجع (2) من البند ٢-٧]

$$(2a) \quad \|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

أو

$$(2b) \quad \|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

يقتضي الدستور (3) من البند ٢-٧ أن

$$(3) \quad |f(x)| \leq \|f\| \|x\|,$$

ونجد كحالة خاصة من المبرهنة ٢-٧-٩ ما يلي :

٢-٨-٢ مبرهنة (الاستمرار والمحدودية)

الشرط اللازم والكافي كي يكون الدالي الخطي f الذي ساحته $\mathcal{D}(f)$ واقعة في فضاء منظم مستمرا هو أن يكون f محدودا .

أمثلة

٢-٨-٢ التنظيم

التنظيم $\mathbf{R} \rightarrow X : \|\cdot\|$ على فضاء منظم $(X, \|\cdot\|)$ هو دالي على X ، وهذا التنظيم غير خطي .

٥-٨-٢ الجداء العددي

يعين الضرب العددي المألوف لدى تثبيت أحد العاملين داليا $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ وفق القاعدة

$$f(x) = x \cdot a = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3,$$

حيث $a = (\alpha_i) \in \mathbb{R}^3$ متجه مثبت .

ان f خطي . كذلك ، فان f محدود . وفي الحقيقة ، فلدينا

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\| \|a\|,$$

وهكذا نجد أن $\|f\| \leq \|a\|$ استنادا الى (2b) وذلك اذا أخذنا الحد الاعلى لكل العناصر x التي نظيم كل منها يساوي 1 . ونجد من جهة ثانية عند أخذ $x = a$ واستخدام (3) أن

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

لذا فان نظيم f هو $\|f\| = \|a\|$.

٦-٨-٢ التكامل المحدد

التكامل المحدد هو عدد اذا أخذنا دالة واحدة ، كما نفعل غالبا في الحساب التكاملي الابتدائي . بيد أن الوضع يختلف تماما اذا أخذنا تكاملات كل الدوال في فضاء دالي معين ، اذ يغدو التكامل عندئذ داليا على ذلك الفضاء ، ولنرمز له بـ f . لنختر مثلا الفضاء $C[a, b]$ (٥-٢-٢) عندئذ يعين f بالمساواة

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt \quad x \in C[a, b].$$

إن f خطي . سنثبت الآن أن f محدود ، وأن نظيمه هو $\|f\| = b - a$.

في الحقيقة ، اذا كتبنا أن $J=[a, b]$ ، وتذكرنا صيغة التنظيم على $C[a, b]$ ،
فاننا نجد أن

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq (b-a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b-a) \|x\|.$$

فاذا أخذنا الحد الاعلى عندما نأخذ كل العناصر x التي تنظيم كل منها 1 ، وجدنا
أن $\|f\| \leq b-a$ * وللحصول على المتباينة $\|f\| \geq b-a$ ، فاننا نختار العنصر الخاص
 $x = x_0 = 1$ الذي تنظيمه $\|x_0\| = 1$ ، ونستعمل (3) فنجد

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b-a.$$

٧-٨-٢ الفضاء $C[a, b]$

ثمة دالي ذو أهمية خاصة على $C[a, b]$ نجده اذا اخترنا عنصرا مثبتا t_0 من
 $J=[a, b]$ ، ووضعنا

$$f_1(x) = x(t_0) \quad x \in C[a, b].$$

ان f_1 خطي * كذلك ، فان f_1 محدود ونظيمه $\|f_1\| = 1$ * وفي الحقيقة ، فان

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|,$$

وهذا يقتضي المتباينة $\|f_1\| \leq 1$ * كذلك ، فاذا اخترنا $x_0 = 1$ ، فان $\|x_0\| = 1$ ، ونجد
عندئذ اطلاقا من (3) أن

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1.$$

٨-٨-٢ الفضاء l^2

يمكننا الحصول على دالي خطي f على فضاء هيلبرت l^2 (١-٢-٣) وذلك
باختيار عنصر مثبت $a = (a_i) \in l^2$ ، وكتابة المساواة

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j$$

حيث $x = (\xi_j) \in l^2$ • ان هذه المتسلسلة تتقارب بالاطلاق و f محدود ذلك أنه يترتب على متباينة كوشي - شقارتز (11) من البند ١-٢ (حين يتم الجمع وفق j من 1 الى ∞) أن

$$|f(x)| = \left| \sum \xi_j \alpha_j \right| \leq \sum |\xi_j \alpha_j| \leq \sqrt{\sum |\xi_j|^2} \sqrt{\sum |\alpha_j|^2} = \|x\| \|a\|. \quad \blacksquare$$

من الامور البالغة الاهمية معرفة أن مجموعة كل الداليات الخطية المعرفة على فضاء متجهي X يمكن أن نحولها ذاتها الى فضاء متجهي • يرمز الى هذا الفضاء بـ X^* ، ويسمى الفضاء الثنوي الجبري (*) لـ X • وتعرف العمليتان الجبريتان عليه حيثذ بصورة طبيعيه على النحو التالي • ان المجموع $f_1 + f_2$ لداليتين f_1 و f_2 هو الدالي s الذي قيمته في كل نقطة x من X هي

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

والجداء αf لعدد α بدالي f هو الدالي p الذي قيمته في النقطة x من X هي

$$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

لاحظ أن هذا ينسجم والطريقة المعروفة في جمع الدوال وضربها بأعداد ثابتة • لنسر خطوة أخرى الى الامام ، وذلك بأخذ الثنوي الجبري $(X^*)^*$ لـ X^* ، الذي عناصره هي الداليات الخطية المعرفة على X^* • سنرمز لـ $(X^*)^*$ بـ X^{**} ، وسنطلق عليه اسم الفضاء الثنوي الجبري الثاني لـ X •

ان سبب ادخال الفضاء X^{**} في اعتبارنا يكمن في أنه يمكن الحصول على علاقة هامة بين X و X^{**} كما يلي • لنختر أولاً الرموز

※ لاحظ أن هذا التعريف لا يدخل فيه تنظيم ، فالفضاء الذي يطلق عليه اسم الفضاء الثنوي X' ، والمؤلف من كل الداليات الخطية والمحدودة على X سنقابله في البند ٢-١٠ •

القيمة في نقطة	العنصر العام	الفضاء
$\bar{\quad}$	x	X
$f(x)$	f	X^*
$g(f)$	g	X^{**}

من الممكن الحصول على $g \in X^{**}$ ، وهو دالي خطي معرف على X^* ، بأن نختار عنصرا مثبتا x من X وكتابة

$$(4) \quad g(f) = g_x(f) = f(x) \quad (x \text{ عنصر مثبت من } X \text{ و } f \text{ متغير في } X^*)$$

ان وضع الدليل السفلي x هو تذكرة لنا بأننا حصلنا على g باستعمال عنصر معين x من X . وعلى القارئ أن يلاحظ بأن f هنا هو المتغير ، في حين أن x مثبت . واذا تذكرنا هذا ، فإنه يفترض فينا أن لا نجابه أي صعوبة في ادراك موضوعنا الحالي .

ان g_x كما عرفناه في (4) خطي ، وهذا أمر يمكن رؤيته مما يلي :

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2).$$

لذا فان g_x عنصر من X^{**} استنادا الى تعريف X^{**} .
بما أنه يقابل كل عنصر x من X عنصر g_x من X^{**} ، فإنه يتحدد تطبيق هو

$$C: X \longrightarrow X^{**}$$

$$x \longmapsto g_x.$$

يدعى C التطبيق القانوني لـ X في X^{**} .

التطبيق C خطي لان ساحته هي فضاء متجهي ولان

$$\begin{aligned} (C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha (Cx)(f) + \beta (Cy)(f). \end{aligned}$$

يدعى C أيضا **الظمر القانوني** لـ X في X^{**} • ولادراك الباعث على هذه التسمية ، فاننا سنشرح أولا مفهوم « الايزومورفيزم » الهام •

نتعامل في أبحاثنا مع فضاءات متنوعة ، والمشارك بين هذه الفضاءات جميعا هو أن كلا منها يتألف من مجموعة ، ولنرمز لها بـ X ، ومن « بنية » معرفة على X • وهذه البنية في الفضاءات المترية هي المترية • أما في الفضاءات المتجهية ، فان ما يشكل البنية هو العمليتان الجبريتان على هذه الفضاءات • وفي الفضاءات المنظمة ، فان البنية مؤلفة من العمليتين الجبريتين ومن التنظيم •

لنفترض أن X و \bar{X} فضاءان من نوع واحد (فضاءان متجهيان مثلا) • من المهم معرفة ما اذا كان X و \bar{X} « متطابقين في جوهرهما » ، بمعنى أنهما مختلفان على الأكثر في طبيعة نقاطهما • فاذا تم ذلك ، فمن الممكن اعتبار X و \bar{X} متطابقين (وكأنهما نسختان لفضاء « مجرد » واحد) عندما تكون البنية هي الهدف الاساسي في دراستنا للفضاءين ، في حين تكون طبيعة عناصرهما ليست بذي بال • ان هذا الوضع يرد غالبا ، و هو ما أوحى بمفهوم الايزومورفيزم (أو التماثل) ، الذي يعرف بأنه تطبيق متباين وغامر لـ X على \bar{X} ويحفظ البنية •

لذا فان الايزومورفيزم T لفضاء متري $X=(X, d)$ على فضاء متري $\bar{X}=(\bar{X}, \bar{d})$ هو تطبيق متباين وغامر يحفظ المسافة ، أي أنه اذا كان x, y أي عنصرين من X فان

$$\bar{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

ونقول عندئذ أن \bar{X} ايزومورفي (أو متماثل) مع X • ان هذا ليس بجديد علينا ، اذ هو مجرد تسمية أخرى للدالة المتباينة والغامرة والايزومترية التي أوردناها في التعريف ١-٦-١ • أما الجديد فهو التالي •

الايزومورفيزم T لفضاء متجهي X على فضاء متجهي \bar{X} على الحقل نفسه هو تطبيق متباين وغامر يحفظ العمليتين الجبريتين للفضاء المتجهي • وهكذا فانه اذا كان x, y أي عنصرين من X ، وكان α أي عدد فان

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

أي أن $T: X \rightarrow \bar{X}$ هو مؤثر خطي متباين وغامر . يقال عن \bar{X} عندئذ إنه ايزومورفي مع X ، ويدعى X و \bar{X} فضاءين متجهيين ايزومورفيين .

ان الايزومورفيزمات للفضاءات المنظمة هي ايزومورفيزمات الفضاءات المتجهية والتي أيضا تحفظ النظام . وسنتطرق الى التفاصيل في البند ٢-١٠ حيث سنتعامل مع هذه الايزومورفيزمات . أما في الوقت الحاضر ، فيمكن أن نطبق تعريف ايزومورفيزمات الفضاء المتجهي كما في التالي .

من الممكن الاثبات بأن التطبيق القانوني C متباين . ولما كان C خطيا (كما في السابق) ، فانه ايزومورفيزم لـ X على المدى $\mathcal{R}(C)$ المحتوى في X^{**} . اذا كان X ايزومورفيا مع فضاء جزئي من فضاء متجهي Y ، فاننا نقول إن X **ظهور** في Y . لذا فان X ظهور في X^{**} ، ويدعى C أيضا **الظمر القانوني** لـ X في X^{**} .

واذا كان C غامرا (وبالتالي تقابلا) ، فان $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ ، ويقال عندئذ عن X انه **انعكاسي جبريا** . وسنثبت في البند القادم أنه اذا كان X منتهي البعد ، فان X انعكاسي جبريا .

هذا ، وسنقدم مناقشة مماثلة تتعلق بالنظام وتقود الى مفهوم **الانعكاسية** في الفضاء المنظم فيما بعد (في البند ٤-٦) ، وذلك بعد تطوير أدوات مناسبة (وبوجه خاص ، مبرهنة هان — باناخ الشهيرة) .

مسائل

١ — أثبت أن الداليين الواردين في ٢-٨ و ٢-٨ خطيان .

٢ — بين بأن الداليين المعرفين $C[a, b]$ بالمساواتين

$$f_1(x) = \int_a^b x(t)y_0(t) dt \quad (y_0 \in C[a, b])$$

$$f_2(x) = \alpha x(a) + \beta x(b) \quad (\alpha, \beta \text{ fixed})$$

خطيان ومحدودان .

٣ - حدد النظم للدالي الخطي f المعرف على $C[-1,1]$ بالمساواة

$$f(x) = \int_1^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt.$$

٤ - بين بأن المساواتين

$$f_1(x) = \max_{t \in J} x(t)$$

$$J = [a, b]$$

$$f_2(x) = \min_{t \in J} x(t)$$

تحددان داليتين على $C[a, b]$. هل هما خطيان ؟ وهل هما محدودان ؟

٥ - بين بأنه يمكن أن نعرف على أي فضاء متتاليات X داليا خطيا f وذلك بوضع $f(x) = \xi$ (" مثبت) ، حيث $x = (\xi_i)$. هل f محدود عندما يكون $X = l^\infty$ ؟

٦ - (الفضاء $C[a, b]$) . الفضاء $C^1[a, b]$ أو $C[a, b]$ هو الفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة على $J = [a, b]$ ، حيث يعرف التنظيم بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| + \max_{t \in J} |x'(t)|.$$

بين بأن موضوعات التنظيم محققة . أثبت أن $f(x) = x'(c)$ ، حيث $c = (a+b)/2$ ، يعرف داليا خطيا ومحدودا على $C[a, b]$. بين أنه إذا اعتبرنا f داليا على الفضاء الجزئي من $C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة ، فإن f غير محدود .

٧ - إذا كان f داليا خطيا محدودا على فضاء منظم عقدي ، فهل يكون \bar{f} محدودا ؟ وهل يكون خطيا ؟ (ان الخط - فوق f يرمز الى المرافق العقدي) .

٨ - (الفضاء الصفري) . يعرف الفضاء الصفري $N(M^*)$ لمجموعة M^*

محتواة في X^* بأنه مجموعة كل العناصر x من X بحيث يكون $f(x)=0$ أيا كان f من M^* • بين بأن $N(M^*)$ فضاء متجهي •

٩- ليكن $f \neq 0$ أي دالي خطي على فضاء متجهي X ، وليكن x_0 أي عنصر مثبت من $X - N(f)$ ، حيث $N(f)$ هو الفضاء الصفري لـ f • بين بأنه يوجد لاي x من X تمثيل وحيد بالشكل $x = \alpha x_0 + y$ ، حيث $y \in N(f)$ •

١٠- بين أن الشرط اللازم والكافي كي ينتمي عنصران x_1 و x_2 من X الى نفس العنصر من فضاء حاصل القسمة $X/N(f)$ في المسألة ٩ هو أن يكون $f(x_1) = f(x_2)$ • بين أن $\text{codim } N(f) = 1$ (راجع المسألة ١٤ من البند ١-٢) •

١١- أثبت أنه اذا كان $f_1 \neq 0$ و $f_2 \neq 0$ دالين خطيين معرفين على فضاء متجهي واحد ، ولهما فضاء صفري واحد ، فانهما متناسبان •

١٢- (المستوي) • اذا كان Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X وكان $\text{codim } Y = 1$ ، (راجع المسألة ١٤ من البند ١-٢) ، فانه يقال عن كل عنصر من X/Y انه مستو مواز لـ Y • بين أنه اذا كان $f \neq 0$ أي دالي خطي على X ، فان المجموعة $H_1 = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ تمثل مستويا موازيا للفضاء الصفري لـ $N(f)$ •

١٣- اذا كان Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X ، وكان f داليا خطيا على X بحيث أن $f(Y)$ ليس الحقل العددي الكلي لـ X ، فبين أن $f(y) = 0$ أيا كان y من Y •

١٤- بين بأنه اذا كان $\|f\|$ نظيما لدالي خطي محدود $f \neq 0$ على فضاء منظم X ، فان $\|f\|$ يؤوكل هندسيا بأنه عكس المسافة $d = \inf \{\|x\| \mid f(x) = 1\}$ الفاصلة بين المستوي $H_1 = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ والمبدأ •

١٥- (نصف الفضاء) ليكن $f \neq 0$ داليا خطيا محدودا على فضاء منظم حقيقي X • عندئذ يوجد لكل عدد c مستو $H_c = \{x \in X \mid f(x) = c\}$ ، ويمر H_c بنصفي الفضاء

$$X_{c1} = \{x \mid f(x) \leq c\} \quad \text{و} \quad X_{c2} = \{x \mid f(x) \geq c\}.$$

بين بأن الكرة المغلقة الواحدة تقع في X_{c1} ، حيث $c = \|f\|$ ، في حين أنه لا يوجد عدد موجب ε بحيث يحوي نصف الفضاء X_{c1} ، بفرض $c = \|f\| - \varepsilon$ ، الكرة المذكورة .

٩-٢ المؤثرات والداليات الخطية على الفضاءات منتهية البعد

الفضاءات المتجهية منتهية البعد أبسط من الفضاءات المتجهية غير منتهية البعد ، ومن الطبيعي أن تتساءل عن ماهية التبسيط الذي يصيب المؤثرات والداليات الخطية المعرفة على مثل هذه الفضاءات . هذا هو السؤال الذي سندرسه في هذا البند ، وسيوضح الجواب عنه دور المصفوفات (المنتهية) في صدد المؤثرات الخطية ، وأيضا بنية الثنوي الجبري X^* (البند ٨-٢) لفضاء متجهي منتهي البعد X .

من الممكن تمثيل المؤثرات الخطية على فضاءات متجهية منتهية البعد بدلالة المصفوفات ، كما سنرى بعد قليل . وبهذه الطريقة ، تغدو المصفوفات أهم أداة في دراسة المؤثرات الخطية في حالة البعد المنتهي . وفي هذا السياق ، علينا أيضا أن نتذكر البرهنة ٢-٧-٨ إن نحن أردنا الاحاطة التامة بموضوعنا الحالي . والتفاصيل هي على النحو التالي :

ليكن X و Y فضاءين متجهين منتهي البعد على الحقل نفسه ، وليكن $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا . لنختار قاعدة $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ لـ X وأخرى $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ لـ Y ، حيث المتجهات مرتبة بطريقة نبقها ثابتة . عندئذ يوجد لكل x من X التمثيل الوحيد

$$(1) \quad x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n.$$

وبما أن T خطي ، فإن صورة x هي

$$(2) \quad y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k T e_k.$$

ولما كان التمثيل (1) وحيدا ، فاننا نقع على النتيجة الاولى وهي :

يتحدد المؤثر T بصورة وحيدة اذا كانت الصور $y_k = Te_k$ لتجهات القاعدة e_1, \dots, e_n معينة مسبقا .

وبما أن y و $y_k = Te_k$ واقعة في Y ، فانه يوجد لها تمثيلات وحيدة من النمط

$$(a) \quad y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j$$

$$(b) \quad Te_k = \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j$$

ونجد بعد التعويض في (2) أن

$$y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j = \sum_{k=1}^n \xi_k Te_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k \right) b_j$$

ونظرا لكون المتجهات b_j تشكل مجموعة مستقلة خطيا ، فان معاملات كل من b_j في اليسار وفي اليمين يجب أن تكون واحدة ، أي أن

$$(4) \quad \eta_j = \sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k \quad j = 1, \dots, r$$

يترتب على هذا النتيجة الثانية وهي :

يمكن الحصول على الصورة $y = Tx = \sum \eta_j b_j$ للعنصر $x = \sum \xi_k e_k$ من المساواة (4) .

لاحظ الوضع غير العادي لدليل الجمع j لـ τ_{jk} في (3b) ، وهذا ضروري كي نصل الى الوضع العادي لدليل الجمع في (4) .
تشكل المعاملات في (4) المصفوفة

$$T_{EB} = (\tau_{jk})$$

التي عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n . واذا أعطيت قاعدة E لـ X وأخرى B

لـ Y ، حيث تكون العناصر في E و B مرتبة وفق نظام معين (اختياري لكن مثبت) فإن المصفوفة T_{EB} تكون محددة بصورة وحيدة بالمؤثر الخطي T .
ونقول ان المصفوفة T_{EB} تمثل المؤثر T بالنسبة لهاتين القاعدتين .

وإذا استعملنا المتجهين العموديين $\bar{x} = (\xi_k)$ و $\bar{y} = (\eta_l)$ ، فانه يمكن كتابة (4) باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$(4') \quad \bar{y} = T_{EB} \bar{x}.$$

كذلك ، فمن الممكن كتابة (3b) باستخدام المصفوفات على النحو التالي

$$(3b') \quad Te = T_{EB}^T b$$

حيث Te المتجه العمودي الذي مركباته Te_1, \dots, Te_n (التي هي نفسها متجهات) ، وحيث b المتجه العمودي الذي مركباته b_1, \dots, b_r ، علما بأنه علينا استعمال المنقول T_{EB}^T لـ T_{EB} لاننا في (3b) نجتمع وفق z ، وهو الدليل السفلي الاول ، في حين أننا في (4) نجتمع وفق k ، هو الدليل السفلي الثاني .

نستنتج مما تقدم أن المؤثر الخطي T يحدد مصفوفة وحيدة ممثلة لـ T بالنسبة الى قاعدة معطاة لـ X وقاعدة معطاة لـ Y ، حيث يفترض في متجهات كل من هاتين القاعدتين أن تكون مرتبة وفق نظام مثبت . وبالعكس ، فإن كل مصفوفة عدد أسطرها r وعدد أعمدها n تحدد مؤثرا خطيا تمثله بالنسبة لقاعدتين مفروضتين لـ X و Y . (راجع أيضا ٢٦٨-٢٧٠) .

لنتقل الآن الى الداليات الخطية على X ، بفرض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X كما في السابق . وجدنا في البند السابق أن هذه الداليات تشكل الفضاء الثنوي الجبري X^* لـ X . وإذا كان f أي دالي من هذه الداليات ، وكان $x = \sum \xi_i e_i$ أي عنصر من X فإن

$$(5a) \quad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i$$

حيث يكون

$$(5b) \quad \alpha_j = f(e_j) \quad j=1, \dots, n$$

ويكون f محددًا بصورة وحيدة بقيمه α_j في متجهات القاعدة لـ X التي عددها n .

وبالعكس ، فإن كل مرتبة n من الأعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ تحدد دالًا خطيًا على X وفق (5) . لنأخذ بوجه خاص المرتبات n التالية :

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 0, & 1. \end{pmatrix}$$

أن هذه المرتبات تعطي استنادًا إلى (5) n من الداليات ، سنرمز لها بـ f_1, \dots, f_n حيث تحدد قيمها كما يلي :

$$(6) \quad f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k, \\ 1 & \text{if } j = k; \end{cases}$$

أي أن قيمة f_k تساوي 1 في متجه القاعدة الذي ترتيبه k ، وتساوي 0 في متجهات القاعدة الباقية (التي عددها $n-1$) . يسمى δ_{jk} دلتا كرونكر ، كما تسمى $\{f_1, \dots, f_n\}$ القاعدة الثنوية لقاعدة X وهي $\{e_1, \dots, e_n\}$. وهذا مبرر بالمبرهنة التالية .

١-٩-٢ مبرهنة (بعد X^*)

إذا كان X فضاء متجهيًا بعده n ، وكانت $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X ، فإن $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ المحددة بالمساويات (6) تشكل قاعدة للثنوي الجبري X^* لـ X ، كما يكون $\dim X^* = \dim X = n$.

البرهان :

ان F مستقلة خطيا ذلك أن المساواة

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x) = 0 \quad (x \in X)$$

عندما $x = e_j$ تقتضي أن يكون

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \delta_{jk} = \beta_j = 0,$$

لذا فان كل المعاملات β_k في (7) أصفار . سنبين أن كل f من X^* يمكن تمثيله على شكل تركيب خطي لعناصر F بصورة وحيدة . لنكتب $f(e_j) = \alpha_j$ كما في (5b) . نجد استنادا الى (5a) أن

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j \alpha_j$$

أيا كان x من X . كذلك ، فائنا نجد استنادا الى (6) أن

$$f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_j.$$

وبالتالي فان

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x).$$

لذا فان التمثيل الوحيد للدالي الخطي الكيفي f على X بدلالة الداليات f_n, \dots, f_1 هو

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n. \quad \blacksquare$$

سنورد تطبيقا هاما لهذه المبرهنة ، ولهذا الغرض سنثبت أولا صحة التمهيد التالي . (سنقدم تمهيدا ماثلا يتعلق بالفضاءات المنظمة الاختيارية فيما بعد ، وعلى وجه التحديد في ٤-٣-٤) .

٢-٩-٢ تمهيدية (المتجه الصفري)

ليكن X فضاء متجهيا منتهي البعد . فإذا كان العنصر x_0 من X يحقق
المساواة $f(x_0)=0$ أيا كان f من X^* ، فإن $x_0=0$.

البرهان :

لتكن $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X ، وليكن $x_0 = \sum \xi_{0j} e_j$. عندئذ تصبح (5)
بالشكل

$$f(x_0) = \sum_{j=1}^n \xi_{0j} \alpha_j.$$

وبما أن هذا المقدار مساو للصفر أيا كان f من X^* ، فرضا ، أي أنه مساو للصفر
أيا كان اختيارنا للأعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، فإن كل المقادير ξ_{0j} يجب أن تساوي
الصفر . ■

يمكننا الآن أن نجد باستخدام هذه التمهيدية المبرهنة التالية :

٢-٩-٢ مبرهنة (الانعكاسية الجبرية)

كل فضاء متجهي منتهي البعد لابد وان يكون انعكاسيا جبريا .

البرهان :

ان التطبيق القانوني $C: X \rightarrow X^{**}$ الذي أوردناه في البند السابق
خطي . وتعني المساواة $Cx_0=0$ أنه أيا كان f من X^* فإن

$$(Cx_0)(f) = g_{x_0}(f) = f(x_0) = 0,$$

استنادا الى تعريف C . ولما كان هذا يقتضي أن يكون $x_0=0$ وفق التمهيدية
٢-٩-٢ ، فإنه يترتب على المبرهنة ١٠-٦-٢ أنه يوجد للتطبيق C تطبيق عكسي
 $C^{-1}: \mathcal{R}(C) \rightarrow X$ حيث $\mathcal{R}(C)$ مدى C . كذلك ، فإنه يترتب على المبرهنة ذاتها

أن $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X$ ونجد اعتمادا على البرهنة ٢-٩-١ أن

$$\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X.$$

نستنتج من كل ما تقدم أن $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X^{**}$ ، لذا فإن $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ نظرا لكون $\mathcal{R}(C)$ فضاء متجهيا (٢-٦-٩) ، ويكون بعد كل فضاء جزئي تماما من X^{**} أقل من $\dim X^{**}$ استنادا الى البرهنة ٢-١-٨ . وهذا يثبت تعريف الانعكاسية الجبرية المطلوبة . ■

مسائل

١ - حدد الفضاء الصفري للمؤثر $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ الممثل بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٢ - ليكن المؤثر $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ معرفا بـ $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, -x_1 - x_2)$. حدد $\mathcal{R}(T)$ و $\mathcal{N}(T)$ ومصفوفة تمثل T .

٣ - عين قاعدة ثنوية للقاعدة $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ لـ \mathbb{R}^3 .

٤ - لتكن $\{f_1, f_2, f_3\}$ القاعدة الثنوية لـ $\{e_1, e_2, e_3\}$ لـ \mathbb{R}^3 ، حيث $e_1 = (1, 1, 1)$ و $e_2 = (1, 1, -1)$ و $e_3 = (1, -1, -1)$. جد $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ ، حيث $x = (1, 0, 0)$.

٥ - اذا كان f داليا خطيا على فضاء متجهي X بعده n ، فما هو البعد الذي يمكن أن يكون للفضاء الصفري $\mathcal{N}(f)$ ؟

٦ - جد قاعدة للفضاء الصفري للدالي f المعرف على \mathbb{R}^3 بالمساواة $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$ حيث $x = (x_1, x_2, x_3)$.

٧ - أعد نفس الطلب الوارد في المسألة ٦ وذلك بإضافة

$$* \alpha_1 \neq 0 \text{ حيث } f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3$$

٨ - إذا كان Z فضاء جزئيا بعده $(n-1)$ من فضاء متجهي X بعده n ، فبين أن Z هو الفضاء الصفري لدالي خطي مناسب f على X يتحدد بصورة وحيدة مقربا إلى مضروب عددي .

٩ - ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الحدوديات الحقيقية لمتغير حقيقي والتي درجة كل منها أصغر من عدد معطى n ، ومن الحدودي $0-x$ (الذي تترك درجته دون تحديد لسدى تعريف الدرجة) . لتكن $f(x) = x^{(k)}(a)$ قيمة المشتق من المرتبة k (k مثبت) للعنصر x في X في نقطة a من \mathbb{R} . أثبت أن f دالي خطي على X .

١٠ - ليكن Z فضاء جزئيا من فضاء متجهي X بعده n ، وليكن x_0 عنصرا من $X-Z$. بين أن هنالك داليا خطيا f على X بحيث أن $f(x_0) = 1$ ، وأن $f(x) = 0$ أيا كان x من Z .

١١ - إذا كان x و y متجهين مختلفين في فضاء متجهي منتهي البعد X ، فإنه يوجد دالي خطي f على X بحيث يكون $f(x) \neq f(y)$.

١٢ - إذا كانت f_1, \dots, f_p داليات خطية على فضاء متجهي X بعده n ، فبين أن ثمة متجها $x \neq 0$ في X بحيث يكسرون $f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0$. ما هي النتائج التي نستخلصها من هذا بالنسبة إلى المعادلات الخطية ؟

١٣ - (الممدد الخطي) . ليكن Z فضاء جزئيا تماما من فضاء متجهي X بعده n ، وليكن f داليا خطيا على Z . بين أنه يمكن تحديد f خطيا على X ، أي أنه يوجد دالي خطي f على X بحيث يكون $f|_Z = f$.

١٤ - ليكن f داليا على \mathbb{R}^2 معرفا بالمساواة $f(x) = 4\xi_1 - 3\xi_2$ ، حيث $x = (\xi_1, \xi_2)$. ننظر إلى \mathbb{R}^2 على أنه فضاء جزئي من \mathbb{R}^3 محدد بالمساواة $\xi_3 = 0$. عين كل الممدات الخطية f للدالي f من \mathbb{R}^2 إلى \mathbb{R}^3 .

- ١٥- ليكن $Z \subset \mathbb{R}^3$ فضاء جزئيا معرفا بالمساواة $\varepsilon_2 = 0$ ، وليكن f على Z محددًا بالدستور $f(x) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2$. جد ممددا خطيا \tilde{f} لـ f الى \mathbb{R}^3 بحيث يكون $\tilde{f}(x_0) = k$ (عدد مثبت معطى) ، وذلك بفرض أن $x_0 = (1, 1, 1)$. هل \tilde{f} وحيد ؟

٢-١٠ الفضاءات المنظمة للمؤثرات . الفضاء الثنوي

لقد عرفنا في البند ٢-٧ المؤثر الخطي المحدود ، وأوضحناه بأمثلة أساسية خلفت لدى القارئ انطبعا أوليا عن أهمية هذا النوع من المؤثرات . أما في هذا البند فان هدفنا هو التالي : نأخذ أي فضاءين منظمين X و Y (كلاهما حقيقي أو كلاهما عقدي) ، وننظر في المجموعة

$$B(X, Y)$$

المؤلفة من كل المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y ، أي في المؤثرات التي كل منها معرف على X بأكمله ومداه واقع في Y ، ونريد أن نبين بأن المجموعة $B(X, Y)$ يمكن أن تجعل نفسها فضاء منظما (*) .

ان هذا ليس بالأمر العسير ، ذلك أننا أولا نحول المجموعة $B(X, Y)$ الى فضاء متجهي بتعريف المجموع $T_1 + T_2$ لمؤثرين T_1 و T_2 من $B(X, Y)$ بطريقة طبيعية بالمساواة

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

وتعريف الجداء αT لمؤثر T من $B(X, Y)$ بالعدد α بالمساواة

$$(\alpha T)x = \alpha Tx.$$

* ان $B(X, Y)$ تعني الحرف الاول من الكلمة الانجليزية "bounded." ، أي « محدود » . ويستعمل رمز آخر أحيانا بدلا من $B(X, Y)$ هو $L(X, Y)$ ، حيث L تعني الحرف الاول من الكلمة الانجليزية "linear." أي « خطي » . ورغم ان كلا من المصطلحين شائع ، الا أننا سنتمسك بالمصطلح $B(X, Y)$ في كتابنا .

فاذا أعدنا الى الذاكرة مضمون الشق (ب) من التمهيد ٢-٧-٢ . فاننا نجد رأسا النتيجة التالية :

٢-١٠-١ مبرهنة (الفضاء $B(X, Y)$)

ان الفضاء المتجهي $B(X, Y)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية والمحدودة من فضاء منظم X في فضاء منظم Y هو نفسه فضاء منظم ، حيث يعرف التنظيم فيه بالمساواة

$$(1) \quad \|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

متى يفدو $B(X, Y)$ فضاء باناخ ؟ ان هذه مسألة مركزية في التحليل الدالي ، وترد الاجابة عنها في المبرهنة التالية . ومن الجدير ملاحظته في هذه المبرهنة أن شرط كون $B(X, Y)$ فضاء باناخ مستقل عن X ، أي أن X قد يكون تاما ، وقد لا يكون .

٢-١٠-٢ مبرهنة (التمام)

اذا كان Y فضاء باناخ ، فان $B(X, Y)$ يكون فضاء باناخ .

البرهان : ٣

لتكن (T_n) متتالية اختيارية لكوشي في $B(X, Y)$ ، ولنثبت أن (T_n) تتقارب من مؤثر T في $B(X, Y)$. لما كانت (T_n) متتالية لكوشي ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

وهكذا فاننا نجد أنه أيا كان x من X وأيا كان m, n اللذان يكبران N ، فان [راجع (3) من البند ٧-٢] :

$$(2) \quad \|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

لنختار الآن لكل عنصر مثبت x وكل ε معطى عددا n مساويا لـ ε بحيث يكون $\varepsilon > \|x\|$ • عندئذ نجد من (2) أن $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon$ ، ونرى أن $(T_n x)$ هي متتالية كوشي في Y • وبما أن Y تام ، فإن $(T_n x)$ تتقارب ، ولنفترض مثلا أن $T_n x \rightarrow y$ • من الواضح أن النهاية y في Y تابعة للعنصر x الذي اخترناه في X • ونكون بهذا قد عرفنا مؤثرا $T: X \rightarrow Y$ محددًا بالمساواة $y = Tx$ • هذا المؤثر خطي لأن

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim (\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z.$$

سنبت أن T محدود وأن $T_n \rightarrow T$ ، أي أن $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ •

بما أن (2) صحيحة أيا كان m الذي يكبر N ، وأن $T_m x \rightarrow Tx$ ، فسنتمكن جعل $m \rightarrow \infty$ • وباستخدام حقيقة كون التنظيم مستمرا ، فإننا نجد عندئذ من (2) أنه أيا كان n الذي يكبر N وأيا كان x من X فإن

$$(3) \quad \|T_n x - Tx\| = \|T_n x - \lim_{m \rightarrow \infty} T_m x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

وهذا يبين أن $(T_n - T)$ عندما يكون $n > N$ ، هو مؤثر خطي محدود • وبما أن T_n محدود ، فإن $T = T_n - (T_n - T)$ محدود ، أي أن $T \in B(X, Y)$ • فضلا عن ذلك ، فإذا أخذنا في (3) الحد الأعلى عندما تسمح x كل العناصر التي تنظيم كل منها 1 ، فإننا نجد

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad (n > N).$$

لذا فإن $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ • ■

لهذه المبرهنة نتيجة هامة بالنسبة الى الفضاء الثنوي X' للفضاء X الذي نعرفه كما يلي :

٢-١٠-٣ تعريف (الفضاء الثنوي X')

ليكن X فضاء منظما • عندئذ تشكل مجموعة الداليات الخطية المحدودة

على X فضاء منظما حيث التنظيم معرف بالمساواة

$$(4) \quad \|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

[راجع (2) من البند ٨-٢] يدعى هذا الفضاء الفضاء الثنوي (*) للفضاء X ويرمز له بـ X' . ■

لما كان الدالي الخطي على X تطبيقا لـ X في \mathbb{R} أو \mathbb{C} (أي في الحقل العددي لـ X) وكان \mathbb{R} و \mathbb{C} المزودان بالترك المألوف تامين ، فاننا نستنتج أن X' هو $B(X, Y)$ حيث Y هو الفضاء التام \mathbb{R} أو الفضاء التام \mathbb{C} . لذا فانه يمكن تطبيق المبرهنة ٢-١٠-٢ في هذه الحالة ، ونجد ما يلي :

٢-١٠-٤ مبرهنة (الفضاء الثنوي)

الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X هو فضاء باناخ (سواء اكان X فضاء باناخ ام لم يكن كذلك) .

من المبادئ الاساسية في التحليل الدالي أن تقصّي الفضاءات يقترن غالبا بتقصي الفضاءات الثنوية . ولهذا نجد من المناسب أخذ بعض الفضاءات التي نقابلها مرارا في التحليل الدالي والبحث عن شكل فضاءاتها الثنوية . وفي هذا المقام ، فان مفهوم الايزومورفيزم يعيننا في تفهم المناقشة الحالية . سنورد الآن التعريف التالي الذي يستند الى ما جاء في البند ٨-٢ .

إن ايزومورفيزم فضاء منظم X على فضاء منظم \bar{X} هو تطبيق متباين وغامر $T: X \rightarrow \bar{X}$ يحفظ التنظيم ، بمعنى أنه اذا كان x أي عنصر من X فان

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

* يدعى هذا الفضاء أحيانا الفضاء المرافق لـ X . تذكر اننا عرفنا الفضاء الثنوي الجبري X' لـ X في البند ٨-٢ بأنه الفضاء المتجهي المؤلف من جميع الداليات الخطية على X .

(لذا فإن T ايزومتري) • ونقول عندئذ عن X انه ايزومورفي مع \bar{X} ، ويسمى الفضاءان X و \bar{X} فضاءين منظمين ايزومورفيين . ومن وجهة نظر مجردة ، فاننا نعتبر الفضاءين الايزومورفيين X و \bar{X} متطابقين ، وكأن تأثير الايزومورفيزم لا يعدو كونه اطلاق أسماء جديدة على العناصر (وذلك باضافة T الى كل منها) •
ان المثال الاول الذي سنسوقه الآن يبين أن الفضاء الثنوي لـ \mathbb{R}^n ايزومورفي مع \mathbb{R}^n ، وهذا يعني بايجاز أن الفضاء الثنوي لـ \mathbb{R}^n هو \mathbb{R}^n •

امثلة

٢-١٠-٥ الفضاء \mathbb{R}^n

• الفضاء الثنوي لـ \mathbb{R}^n هو \mathbb{R}^n •

البرهان :

نلاحظ أولا استنادا الى المبرهنة ٢-٧-٨ أن $\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{R}^n$ ، وأنه يترتب على (5) من البند ٢-٩ أن لكل f من \mathbb{R}^{n*} التمثيل

$$f(x) = \sum \xi_k \gamma_k \quad \gamma_k = f(e_k)$$

(الجمع يتم من 1 الى n) • واعتمادا على متباينة كوشي - شقارتز (البند ٢-١١) فان

$$|f(x)| \leq \sum |\xi_k \gamma_k| \leq \left(\sum \xi_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum \gamma_k^2 \right)^{1/2} = \|x\| \left(\sum \gamma_k^2 \right)^{1/2}$$

وبأخذ الحد الاعلى عندما تسح x جميع العناصر التي نظيمها 1 ، فاننا نجد أن

$$\|f\| \leq \left(\sum \gamma_k^2 \right)^{1/2}$$

ومن جهة أخرى ، فمن السهل التحقق أنه اذا أخذنا العنصر $x = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ نجد

المتباينة

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \right)^{1/2}$$

وبالتالي فإن

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \right)^{1/2}$$

ان هذا يثبت بأن تنظيم f هو التنظيم الاقليدي ، وأن $\|f\| = \|c\|$ ، حيث $c = (\gamma_k) \in \mathbb{R}^n$ ، لذا فإن التطبيق من \mathbb{R}^n على \mathbb{R}^n المحدد بالشكل $c = (\gamma_k)$ ، حيث $\gamma_k = f(e_k)$ ، يحفظ التنظيم . وبما أنه خطي ومتباين وغامر أيضا ، فإنه ايزومورفيزم . ■

٢-١-٠ الفضاء l^1

الفضاء الثنوي l^1 هو \mathbb{R}^3

البرهان :

ان قاعدة شاور (البند ٣-٢) للفضاء l^1 هي (e_k) ، حيث $e_k = (\delta_{ki})$ ، عندئذ يوجد لكل x من l^1 التمثيل الوحيد التالي

$$(5) \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

لنأخذ أي f من l^1 ، حيث l^1 هو الفضاء الثنوي l^1 . بما أن f خطي ومحدود فإن

$$(6) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \quad \gamma_k = f(e_k)$$

حيث تتحدد الاعداد $\gamma_k = f(e_k)$ بصورة وحيدة بواسطة f . وبما أن $\|e_k\| = 1$ وأن

$$(7) \quad |\gamma_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|, \quad \sup_k |\gamma_k| \leq \|f\|.$$

فإن $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k$ ، فنجد أن الممكن أن نجد لكل $b = (\beta_k) \in l^1$ من l^{∞} دالياً خطياً g على l^1 وفي الحقيقة ، فإنه يمكن تعريف g على l^1 بالدستور

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k$$

فإن g خطي ، من الواضح أن g خطي ، كما أن محدوديته تنتج من التالي

$$|g(x)| \leq \sum |\beta_k x_k| \leq \sup |\beta_k| \sum |x_k| = \|x\| \sup |\beta_k|$$

(الجمع يتم من 1 إلى ∞) • لذا فإن $g \in l^{\infty}$ •

سنبين أخيراً أن تنظيم f هو التنظيم على الفضاء l^{∞} • من (6) نرى أن

$$|f(x)| = \left| \sum \beta_k x_k \right| \leq \sup |\beta_k| \sum |x_k| = \|x\| \sup |\beta_k|$$

وإذا كانت β_k الحد الأعلى عندما تسمح x كل العناصر التي تنظيمها 1 ، نجد أن

$$\|f\| \leq \sup |\beta_k|$$

ونرى أن هذه المتباينة ومن (7) المساواة

$$(8) \quad \|f\| = \sup |\beta_k|$$

التي ليست سوى التنظيم على l^{∞} • وبالتالي فمن الممكن كتابة هذه المساواة بالشكل $\|f\| = \|c\|$ ، حيث $c = (\beta_k) \in l^{\infty}$ ، وهي تبين أن التطبيق الخطي المتباين والماسر $l^1 \rightarrow l^{\infty}$ على l^{∞} والمعرف بالدستور $f \mapsto c = (\beta_k)$ هو ايزومورفيزم •

ثانياً : إذا $(\gamma_k) \in l^1$ ،

فإن $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k x_k$ ، هو l^1 ، حيث $1 < p < +\infty$ و q هو مرافق p ، أي

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

البرهان :

ان (e_k) ، حيث $e_k = (\delta_{kj})$ كما في المثال السابق تصلح لان تكون قاعدة شاور للفضاء l^p . عندئذ يكون لكل x من l^p التمثيل الوحيد التالي

$$(9) \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

لنأخذ أي f من $l^{p'}$ ، حيث $l^{p'}$ هو الفضاء الثنوي لـ l^p . بما أن f خطي ومحدود فإن

$$(10) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \quad \gamma_k = f(e_k).$$

ليكن q مرافق p (٣-٢-١) ، ولنأخذ $x_n = (\xi_k^{(n)})$ ، بفرض أن

$$(11) \quad \xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\gamma_k|^q / \gamma_k & k \leq n \text{ و } \gamma_k \neq 0 \\ 0 & k > n \text{ أو } \gamma_k = 0 \end{cases}$$

إذا كان
إذا كان

فاذا عوضنا هذا في (10) نجد أن

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(n)} \gamma_k = \sum_{k=1}^n |\gamma_k|^q.$$

كذلك ، فلدينا استنادا الى (11) والى أن $(q-1)p = q$ ، ما يلي :

$$\begin{aligned} f(x_n) &\leq \|f\| \|x_n\| = \|f\| \left(\sum |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1/p} \end{aligned}$$

(يتم الجمع من 1 الى n) . وبالتالي فان

$$f(x_n) = \sum |\gamma_k|^q \leq \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1/p}.$$

وبالتقسيم على العامل الاخير ، فاننا نجد اعتمادا على المساواة $1 - 1/p = 1/q$ ، أن

$$\left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k|^q \right)^{1-1/p} = \left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|.$$

ولما كان n كيفيا ، فاننا نجد بجعل $n \rightarrow \infty$ أن

$$(12) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|.$$

• اذن $(\gamma_k) \in l^q$

وبالعكس ، فمن الممكن أن نجد لكل $b = (\beta_k) \in l^q$ داليا خطيا محدودا مقابلا g على l^p • وفي الحقيقة ، فمن الممكن تعريف g على l^p بأن نضع

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

حيث $x = (\xi_k) \in l^p$ • عندئذ يكون g خطيا ، ومحدوديته تنتج عن متباينة هولدر (10) من البند ٢-١ • لذا فان $g \in l^{p'}$

سنبين أخيرا أن تنظيم f هو التنظيم على الفضاء l^q • لدينا انطلاقا من (10) ومن متباينة هولدر ما يلي

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum \xi_k \gamma_k \right| \leq \left(\sum |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1/q} \\ &= \|x\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1/q} \end{aligned}$$

(يتم الجمع من 1 الى ∞) • لذا فاذا أخذنا الحد الاعلى عندما يسمح جميع العناصر التي تنظيمها 1 ، نجد أن

$$\|f\| \leq \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1/q}$$

نستنتج من هذا ومن (12) المساواة

$$(13) \quad \|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^q \right)^{1/q}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل $\|f\| = \|c\|_q$ ، حيث $c = (\gamma_k) \in l^q$ ، و $\gamma_k = f(e_k)$. ان التطبيق L^p على l^q المعرف بالدستور $c \mapsto f$ خطي ومتباين وغامر . وبإضافة (13) الى هذا نستنتج أنه يحفظ التنظيم ، وبالتالي فهو ايزومورفيزم . ■

ما هي أهمية هذه الامثلة والامثلة المشابهة لها ؟ من الاهمية بمكان في البحوث التطبيقية معرفة الشكل العام للداليات الخطية والمحدودة على فضاءات متداولة من الوجهة العملية ، ولقد تم فعلا دراسة العديد من الفضاءات بهذا الشكل . ان أمثلتنا تقدم التمثيلات العامة للداليات الخطية والمحدودة على \mathbb{R}^n و l^1 و l^p ، حيث $p > 1$. أما الفضاء $C[a, b]$ ، فسن تناوله بالبحث فيما بعد (البند ٤-٤) ، وذلك بعد التعرف على أدوات اضافية لازمة لدراسة هذا الفضاء (وأهمها ما يسمى بمبرهنة هان - باناخ) .

كذلك ، فاذا أعدنا الى الذاكرة ما سبق وتمت مناقشته بصدد الفضاء الثنوي الجبري X^{**} في البند ٢-٨ ، فمن الممكن التساؤل عما اذا كان يجدر بنا دراسة الفضاء الثنوي الثاني $X'' = (X')'$ للفضاء X . ومع أن الاجابة عن هذا التساؤل تتسم بالإيجاب ، فاننا سنرجئ هذه الدراسة الى البند ٤-٦ ، حيث نطور أساليب ملائمة للحصول على نتائج أساسية في ذلك الاتجاه . أما في الفصل القادم ، فسن توجه الى أمور أبسط الى حد ما ، ونعني بها فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت . وسنرى أن هذه فضاءات منظمة خاصة تحظى بأهمية تطبيقية هائلة .

مسائل

١ — ما هو العنصر الصفري في الفضاء المتجهي $B(X, Y)$ ؟ وما هو عكس عنصر T من $B(X, Y)$ بالمعنى الوارد في التعريف ٢-١-١ ؟

٢ — لقد عرفنا المؤثرات والداليات التي درسناها حتى الآن على الفضاء X بكامله . أثبت أنه حتى لو استغنيينا عن هذا الفرض ، فاننا نجد في حالة

الداليات المبرهنة التالية : « إذا كان f و g داليين خطيين محدودين
ساحتهما في فضاء منظم X ، فإنه إذا افترضنا α و β عددين غير صفريين ،
فان التركيب الخطي $h = \alpha f + \beta g$ يكون داليا خطيا محدودا ساحته
• « $\mathcal{B}(h) = \mathcal{B}(f) \cup \mathcal{B}(g)$ »

٣ - عمم المبرهنة الواردة في المسألة السابقة على المؤثرين الخطيين المحدودين
• T_1 و T_2

٤ - ليكن X و Y فضاءين منظمين ، ولتكن $T_n: X \rightarrow Y$ ($n=1, 2, \dots$) مؤثرات
خطية محدودة . بين أن التقارب $T_n \rightarrow T$ يقتضي أن يوجد عدد صحيح
موجب N لكل عدد موجب ϵ ، بحيث أنه إذا كان n أي عدد طبيعي يحقق
المتباينة $n > N$ ، وإذا كان x أي عنصر منتم الى كرة مغلقة معطاة ، فإننا
نجد المتباينة $\|T_n x - T x\| < \epsilon$.

٥ - بين أن ℓ^2 ينسجم مع ℓ^1 و ℓ^∞ .

٦ - إذا كان X فضاء المرتبات n من الاعداد الحقيقية ، وكان $\|x\| = \max |x_i|$ ،
حيث $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، فما هو النظم المقابل للفضاء الثنوي X' ؟

٧ - ما هي النتيجة التي يمكن الحصول عليها من ١-٢ و ٦-١ في حالة الفضاء
 X المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد الحقيقية ؟

٨ - أثبت أن الفضاء الثنوي للفضاء ℓ^1 هو ℓ^∞ (راجع المسألة ١ من البند
٢-٣) .

٩ - بين أن الدالي الخطي f على فضاء متجهي X يتحدد بصورة وحيدة لدى
معرفة قيمه على قاعدة لهامل للفضاء X . (راجع البند ٢-١) .

١٠ - ليكن X و $Y \neq \{0\}$ فضاءين منظمين ، حيث $\dim X = \infty$. أثبت أنه يوجد
مؤثر خطي غير محدود واحد على الاقل $T: X \rightarrow Y$. (استخدم قاعدة
هامل) .

١١ - إذا كان X فضاء منظما وكان $\dim X = \infty$ ، فبين أن الفضاء الثنوي X' لا
يتطابق مع الفضاء الثنوي الجبري X^* .

١٢- (التمام) • يمكن استخدام الامثلة الواردة في البند السابق لاثبات تمام فضاءات معينة • كيف يتم هذا الامر ؟ وما هي هذه الفضاءات ؟

١٣- (العدم) • لتكن M أي مجموعة جزئية غير خالية في فضاء منظم X • يعرف العدم M^c لـ M بأنه مجموعة كل الداليات الخطية المحدودة على X المساوية للصفر في كل نقطة من M • وهكذا فإن M^c مجموعة جزئية من الفضاء الثنوي X' للفضاء X • بين أن M^c فضاء متجهي جزئي من X' ، وأن هذا الفضاء الجزئي مغلق • حدد X^c و $\{0\}^c$ •

١٤- إذا كان M فضاء جزئيا بعده m من فضاء منظم X بعده n ، فبين أن M^c هو فضاء جزئي من X' بعده $(n-m)$ • صنع هذا على شكل مبرهنة حول حلول جملة معادلات خطية •

١٥- لتكن $M = \{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$ • أوجد قاعدة لـ M^c •

* * *

الفصل الثالث

فضاءات الجداء الداخلي . فضاءات هيلبرت

من الممكن في كل فضاء منظم أن نجتمع المتجهات وأن نضرب المتجهات بأعداد ، تماما كما نفعل في جبر المتجهات . فضلا عن ذلك ، فإن النظم على الفضاء المنظم يعمم مفهوم طول المتجه . بيد أن الذي ما يزال ناقصا في الفضاء المنظم العام ، والذي نود إدراجه في هذا الفضاء إن أمكن ، هو شبيه للجداء الداخلي الذي عرفناه في جبر المتجهات في الفضاء R^3 بالمساواة

$$a \cdot b = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$$

والذي أسفر عن عدة نتائج منها أن

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

وأن شرط تعامد متجهين هو

$$a \cdot b = 0$$

وقد وجدنا أن هذا التعريف وما ينتج عنه هي أدوات ذات فعالية كبيرة في العديد من التطبيقات . لذا فانه يرد السؤال عما إذا كان من الممكن تعميم الجداء الداخلي والتعامد على الفضاءات المتجهية العامة . وفي الحقيقة ، فقد وجد أن هذا أمر يمكن تنفيذه ، إذ تسم التوصل الى ما يسمى بفضاءات الجداء الداخلي ، التي يطلق عليها حين تكون تامة اسم فضاءات هيلبرت .

ان فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظمة خاصة ، كما سنرى بعد قليل ، وهي في التسلسل التاريخي أقدم من الفضاءات المنظمة العامة ، كما أن نظرية هذه الفضاءات أغنى ، وتمتلك كثيرا من ملامح الفضاءات الاقليدية ، التي يشغل مفهوم التعامد فيها مركزا متميزا . وفي الحقيقة ، فان فضاءات الجداء الداخلي قد تكون أكثر التعميمات الطبيعية للفضاء الاقليدي ، وعلى القارىء أن يلاحظ التناسق الكبير والجمال الذي تتمتع به المفاهيم والبراهين في هذا المجال . وقد استوحيت النظرية بكاملها من بحوث د. هلمبرت (١٩١٢ م) في المعادلات التكاملية . أما الرموز والمصطلحات الهندسية المستعملة حاليا ، فهي مشابهة لتلك الواردة في الهندسة الاقليدية ، وقد اعتمدها شملت عام ١٩٠٨ م بناء على اقتراح كالفينسكي (كما ذكر شملت في الصفحة ٥٦ من بحثه) . وقد تبين أن هذه الفضاءات أكثر الفضاءات أهمية في التطبيقات العملية للتحليل الدالي حتى وقتنا هذا .

مفاهيم هامة • توجيه موجز حول المحتوى الرئيسي

فضاء الجداء الداخلي $X(1-3)$ هو فضاء متجهي مزود بجداء داخلي (x, y) معرف عليه . والجداء الداخلي تعميم للجداء الداخلي لتجهين في الفضاء ثلاثي البعد ، وهو يستعمل لتعريف ما يلي :

$$(I) \text{ النظم } \| \cdot \| \text{ بالمساواة } \|x\| = (x, x)^{1/2}$$

$$(II) \text{ التعامد بالمساواة } (x, y) = 0$$

وفضاء هلمبرت هو فضاء جداء داخلي تام . ونظرية فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلمبرت أغنى من نظرية الفضاءات المنظمة العامة وفضاءات باناخ . ومن السمات المميزة لهذه الفضاءات ما يلي :

(i) تمثيلات الفضاء H بـ مجموع مباشر لفضاء جزئي مغلق ومتممه **المعتمد** $(3-3)$.

(ii) **المجموعات والمتتاليات المتعامدة** والتمثيلات الموافقة لعناصر من H . (راجع البتدين ٣-٤ و ٣-٥) .

(iii) تمثيل ريس ١-٣-١ للداليات الخطية المحدودة بجداءات داخلية .

(iv) مؤثر هلبرت المرافق T^* لمؤثر خطي محدود T (١-٩-٣) .

وتكون المجموعات والمتتاليات المتعامدة هامة فعلا فقط عندما تكون كلية (١-٣) . ومن الممكن استعمال مؤثرات هلبرت المرافقة في تعريف صفوف من المؤثرات (المرافقة ذاتيا ، الواحدية ، الناطمية ، كما في البند ١٠-٣) والتي تنطوي على أهمية بالغة في التطبيقات .

١-٣ فضاءات الجداء الداخلي . فضاءات هلبرت

ان الفضاءات التي تتناولها في هذا الفصل تعرف على النحو التالي .

١-١-٣ تعريف (فضاء الجداء الداخلي ، فضاء هلبرت)

فضاء الجداء الداخلي هو فضاء متجهي X مزود بجداء داخلي معرف على X . أما فضاء هلبرت فهو فضاء جداء داخلي تام (بالنسبة للمترك المحدد بالجداء الداخلي ، كما في (2)) . الجداء الداخلي على X هنا هو تطبيق لـ $X \times X$ في الحقل العددي K لـ X ، بمعنى أنه يقابل كل زوج x و y من المتجهات عدد نشير اليه بالشكل $\langle x, y \rangle$

ويسمى الجداء الداخلي (*) لـ x و y ، بحيث تتحقق الشروط التالية أيا كانت المتجهات x و y و z وأيما كان العدد α :

* يسمى الجداء الداخلي أحيانا الجداء العددي ، الا أنه يجب عدم الخلط بينه وبين جداء متجه بعدد في الفضاء المتجهي . هذا وان الرمز \langle , \rangle للجداء الداخلي شائع تماما . وفي الكتب الابتدائية ، ككتابنا هذا ، فان لهذا الرمز ميزة على الرمز $(,)$ المستعمل كثيرا ، ذلك أنه يستبعد الخلط بينه وبين الزوج المرتب (الذي قد يدل على مركبتي متجه ، أو عنصرين من فضاء جداء ، أو مضمون دالة لتغيرين ، أو غير ذلك) .

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\
(2) \quad & \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \\
(3) \quad & \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \\
& \langle x, x \rangle \geq 0 \\
(4) \quad & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.
\end{aligned}$$

ويحدد الجداء الداخلي على X نقيما على X بالمساواة

$$(1) \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (\geq 0)$$

كما يحدد متركا على X كما يلي :

$$(2) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \quad \blacksquare$$

لذا فان فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظمة ، كما ان فضاءات هيلبرت هي فضاءات باناخ .

وتعني الاشارة الواردة في (جد ٣) المرافق العقدي ، وبالتالي ، فاذا كان X فضاء متجهيا حقيقيا ، فاننا نجد ببساطة أن

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (\text{التناظر})$$

إن الاثبات بأن (1) يحقق موضوعات التنظيم (ن١) - (ن٤) الواردة في ٢-٢ ، يرد في بداية البند التالي .

ويترب على الشروط من (جد ١) وحتى (جد ٣) الدساتير

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \\
(3) \quad (b) \quad & \langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle \\
(c) \quad & \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle
\end{aligned}$$

التي سنستعملها كثيرا . يبين (3a) أن الجداء الداخلي خطي في عامله الايسر . وبما أنه يرد في (3c) المرافقان العقديان $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ في اليمين ، فاننا نقول بأن

الجداء الداخلي خطي مرافق في عامله الايمن • واذا رغبتا في التعبير عن كلا الخاصيتين معا ، فاننا نقول بأن الجداء الداخلي « خطي مرة ونصف المرة » • وما يهيب بنا الى استحداث هذا المصطلح هو أن « الخطي المرافق » يعرف أيضا بأنه « نصف خطي » • ولما كان مصطلح « نصف الخطية » هذا ضعيف الدلالة ، فاننا لن نستعمله •

ويمكن للقارئ أن يبين باجراء حسابات مباشرة وبسيطة أن التنظيم على فضاء جداء داخلي يحقق مساواة متوازي الاضلاع الهامة التالية

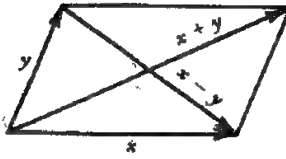
$$(4) \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

وهذا المصطلح مستوحى من الهندسة الابتدائية ، كما نرى في الشكل ٢٣ ، وذلك اذا أعدنا الى الذاكرة بأن التنظيم يعمم المفهوم الابتدائي لطول متجه (البند ٢-٢) • وانه لأمر جدهام أن نلاحظ بأن المعادلة (4) تظل سارية في الفضاءات التي ندرسها حاليا ، والتي هي أعم بكثير من الفضاءات المستعملة في الهندسة الابتدائية •

وفي الختام ، فانه اذا لم يحقق تنظيم المساواة (4) ، فلا يمكن الحصول على هذا التنظيم من جداء داخلي باستعمال (1) • وفي الحقيقة ، فان مثل هذه النظم موجود فعلا ، وسنورد أمثلة عليها بعد قليل • وهكذا فانه يمكننا أن نقول دون أن يكون ثمة مجال للالتباس ما يلي :

ليس كل فضاء منظم فضاء جداء داخلي بالضرورة •

وقبل البدء بإيراد الأمثلة ، فاننا سنحدد مفهوم التعامد ، الذي يشكل مفهوما رئيسيا في النظرية كلها • من المعلوم أنه اذا كان الجداء العددي لمتجهين في فضاء ثلاثي البعد صفرا ، فان المتجهين متعامدان ، أي أن الزاوية بينهما تساوي $\frac{\pi}{2}$ ، أو أن أحدهما على الاقل هو المتجه الصفري • ان هذا يوحى باقتراح التعريف التالي :



الشكل (٢٢) . متوازي أضلاع في المستوي ضلعا x و y

٣-١-٢ تعريف (التعامد)

يقال عن عنصر x في فضاء جداء داخلي X انه متعامد مع العنصر y من X اذا كان

$$(x, y) = 0.$$

ونقول أيضا ان العنصرين x و y متعامدان ، ونكتب $x \perp y$ وبصورة مماثلة ، فاذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من X ، فانا نقول ان x يتعامد مع A ، ونكتب $x \perp A$ ، اذا كان $x \perp a$ ايا كان a من A ، كما نقول بأن A و B متعامدان ، ونكتب $A \perp B$ ، اذا كان $a \perp b$ ايا كان a من A و b من B . ■

أمثلة

٣-١-٢ الفضاء الإقليدي R^n

الفضاء R^n هو فضاء هلبرت ، حيث الجداء الداخلي معرف بالدستور

$$(5) \quad (x, y) = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$$

وحيث $x = (\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $y = (\eta) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$

وفي الحقيقة ، فانه يترتب على (5) أن

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$$

ونحصل من هذا على المترك الاقليدي المعروف كما يلي :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2]^{1/2};$$

(راجع ٢-٢-٢) • هذا وقد أثبتنا التمام في ١-٥-١ •

وإذا كان $n = 3$ ، فإن الدستور (5) يعطي الجداء العددي المألوف

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$$

للمتجهين $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ، كما أن التعامد

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = 0$$

ينسجم مع المفهوم الابتدائي لتعامد متجهين •

١-٢-٤ الفضاء الوحدى C^n

ان الفضاء C^n المعروف في ٢-٢-٢ هو فضاء هلبرت المزود بالجداء الداخلي المعروف بالدستور

$$(6) \quad \langle x, y \rangle = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n.$$

وفي الحقيقة ، فاننا نستنتج من (6) أن التنظيم هو

$$\|x\| = (\xi_1 \bar{\xi}_1 + \dots + \xi_n \bar{\xi}_n)^{1/2} = (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2)^{1/2}.$$

ونرى هنا أيضا سبب وجوب أخذ المرافق العقدي $\bar{\eta}_i$ في (6) ، اذ أنه يترتب على هذا أن $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ ، وهو الشرط (جد ٣) ، وبالتالي فإن $\langle x, x \rangle$ عدد حقيقي •

١-٢-٥ الفضاء $L^2[a, b]$

ان التنظيم في المثال ٧-٢-٢ يعرف بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

ويمكن الحصول عليه من الجداء الداخلي المحدد بالمساواة

$$(7) \quad \langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t) dt.$$

لقد افترضنا في المثال ٢-٢-٧ أن الدوال حقيقية ، وذلك بقصد التبسيط . هذا وفيما يخص بعض التطبيقات العملية ، فانه من المفيد التحرر من هذا القيد باعتبار الدوال عقدية (وبافتراض أن t المنتمي الى $[a, b]$ حقيقي كما في السابق) . وتشكل هذه الدوال فضاء متجهيا عقديا ، يغدو فضاء جداء داخلي حيث

$$(7^*) \quad \langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)} dt.$$

ويعني الرمز — هنا المرافق العقدي ، الذي يجعل الخاصة (جد ٣) محققة ، بحيث يكون $\langle x, x \rangle$ عددا حقيقيا . ونحتاج الى هذه الخاصة ثانية فيما يتعلق بالنظيم ، الذي يمكن أن نعرفه الآن بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

• وذلك لان $x(t)\overline{x(t)} = |x(t)|^2$

ان اتمام الفضاء المترى الموافق للمساواة (7) هو الفضاء الحقيقي $L^2[a, b]$ (راجع ٢-٢-٧) . كذلك ، فان اتمام الفضاء المترى الموافق للمساواة (7*) يدعى **الفضاء العقدي** $L^2[a, b]$. وسنرى في البند القادم بأنه يمكن تمديد الجداء الداخلي من فضاء داخلي الى تمامه . فاذا أضفنا هذا الى ما ناقشناه الآن ، فائنا نستنتج أن $L^2[a, b]$ هو فضاء هيلبرت .

٢-١-٦ فضاء متتاليات هيلبرت l^2

ان الفضاء l^2 (٢-٢-٣) هو فضاء هيلبرت المزود بالجداء الداخلي

$$(8) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j.$$

وتقارب هذه المتسلسلة ناتج من متباينة كوشي - شقارتز (11) من البند ١-٢ ،
ومن كون x و y عنصرين من l^2 فوضا • نرى هنا بأن (8) تعميم لـ (6) ،
والنظيم محدد بالمساواة

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2}$$

أما التمام فقد سبق وأثبتناه في ١-٥ •

ان l^2 هو عينة نموذجية لفضاءات هلبرت ، وقد قدمه ودرسه هلبرت عام
١٩١٢ لدى بحثه في المعادلات التكاملية • هذا ولم يعط تعريف فضاء هلبرت
العام استنادا الى الموضوعات التي تحدده الا بعد فترة طويلة ، وذلك عندما
أورده فون نويمان عام ١٩٢٧ في بحث له حول الاسس الرياضية لميكانيكا الكم •
كذلك فقد تطرق لهذا التعريف ستون عام ١٩٣٢ • ومن الجدير بالذكر أن هذا
التعريف قد تضمن قابلية الفصل ، الا أن هذا الشرط أسقط فيما بعد ، وذلك
عندما بين كل من نوثيك وريش وريس عام ١٩٣٤ أنه في أغلب جوانب النظرية ،
فان هذا الشرط قيد غير لازم •

٧-١-٣ الفضاء l^p

ان الفضاء l^p ، عندما يكون $p \neq 2$ ، ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي
فان l^p ليس فضاء هلبرت •

البرهان :

ان هذه الدعوى تعني أن التنظيم على l^p ، عندما يكون $p \neq 2$ ، لا يمكن
أن يشتق من جداء داخلي • سنبرهن على هذا الامر باثبات أن التنظيم لا يحقق

مساواة متوازي الاضلاع (4) • وفي الحقيقة ، اذا كان $x = (1, 1, 0, 0, \dots) \in l^p$ فان $y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in l^p$

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}, \quad \|x+y\| = \|x-y\| = 2.$$

الامر الذي يبين بأن (4) ليست محققة في الحالة $p \neq 2$ •

لما كان l^p تاما (١-٥-٤) ، فان l^p ، حيث $p \neq 2$ ، هو فضاء باناخ دون ان يكون فضاء هيلبرت • ويصح الامر نفسه في المثال القادم •

٨-١-٢ الفضاء $C[a, b]$

ان الفضاء $C[a, b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فانه ليس فضاء هيلبرت •

البرهان :

سنبين بأن التنظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \quad J = [a, b]$$

لا يمكن اشتقاقه من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الاضلاع (4) • وفي الحقيقة ، فاذا أخذنا $x(t) = 1$ و $y(t) = (t-a)/(b-a)$ ، فاننا نجد أن $\|x\| = 1$ و $\|y\| = 1$ وأن

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}.$$

الذا نجد أن $\|x+y\| = 2$ و $\|x-y\| = 1$ ، وأن

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5 \quad \text{في حين أن} \quad 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$$

وبهذا يكتسل البرهان • ■

سنورد في انختام الحقيقة الهامة التالية • نحن نعلم بأنه يقابل الجداء الداخلي تنظيم محدد بالمساواة (1) • وبالعكس فانه لأمر عظيم الشأن أن نعلم بأنه يمكن « إعادة اكتشاف » الجداء الداخلي من التنظيم الموافق له • وفي الحقيقة ، فيمكن للقارئ التحقق بالحساب المباشر أنه اذا كان الفضاء فضاء جداء داخلي حقيقي ، فان

$$(9) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

وأنه اذا كان فضاء جداء داخلي عقدي ، فان

$$(10) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ \operatorname{Im} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2). \end{aligned}$$

ويطلق أحيانا على الدستور (10) اسم متطابقة الاستقطاب •

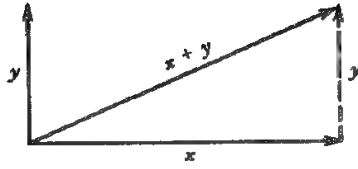
مسائل

١ - أثبت صحة (4) •

٢ - (مبرهنة فيثاغورس) • اذا كان $x \perp y$ في فضاء جداء داخلي x ، فبين أن

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(الشكل ٢٤) • عم هذا الدستور على m من المتجهات المتعامدة متنى •



الشكل (٢٤) • ايضاح مبرهنة فيثاغورس في المستوي

٣ - اذا كان x في المسألة ٢ حقيقيا ، فبين صحة العكس ، أي أن العلاقة الواردة في المسألة المذكورة تقتضي أن يكون $x \perp y$ • أثبت أن هذا قد لا يصح عند كون x عقديا ، وأورد أمثلة على ذلك •

٤ - اذا كان فضاء جداء داخلي X حقيقيا ، فبين أن الشرط $\|x\| = \|y\|$ يقتضي أن يكون $\langle x+y, x-y \rangle = 0$ • ما هو المعنى الهندسي لهذا اذا كان $X = \mathbb{R}^2$ ؟ وما الذي يقتضيه هذا الشرط اذا كان X عقديا ؟

٥ - (متطابقة ابولونيوس) • تحقق بالحساب المباشر أنه أيا كانت العناصر x و y و z في فضاء جداء داخلي فان

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2.$$

بين أنه يمكن كذلك الحصول على هذه المتطابقة انطلاقا من مساواة متوازي الاضلاع •

٦ - ليكن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ • (أ) بين أنه اذا كان $x \perp y$ ، فان $\{x, y\}$ مجموعة مستقلة خطيا • (ب) عمم هذه النتيجة على المتجهات غير الصفريّة والمتعامدة x_1, \dots, x_m •

٧ - اذا كان $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$ أيا كان x في فضاء جداء داخلي ، فبين أن $u = v$ •

٨ - برهن على صحة (9) •

٩ - برهن على صحة (10) •

١٠ - ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين • بين بأن المساواة $\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2$ تعرف جداء

داخليا ، وهذا الجداء يولد المترك المؤلف على المستوى العقدي • ما هو الشرط الذي يجب أن يتوفر كي يتم التعامد ؟

١١- ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الأزواج المرتبة من الاعداد العقدية . هل يمكن الحصول على التنظيم المعرف على X بالمساواة

$$\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| \quad [x = (\xi_1, \xi_2)]$$

انطلاقا من جداء داخلي ؟

١٢- عين $\|x\|$ في ٣-١-٦ اذا كان $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ، حيث (أ) $\xi_n = 2^{-n/2}$ ، (ب) $\xi_n = 1/n$ ؟

١٣- تحقق بأنه في حالة الدوال المستمرة ، فان الجداء الداخلي الوارد في ٣-١-٥ يحقق الشروط (جد ١) - (جد ٤) •

١٤- بين أن التنظيم على $C[a, b]$ لا متغير عند القيام بالتحويل الخطي $r = a\tau + \beta$ • أفد من هذا في اثبات صحة الدعوى الواردة في ٣-١-٨ ، وذلك بتطبيق ينقل $[a, b]$ الى $[0, 1]$ ، ومن ثم بأخذ الدالتين المعرفتين كما يلي : $\bar{x}(\tau) = 1$ و $\bar{y}(\tau) = \tau$ حيث $\tau \in [0, 1]$ •

١٥- اذا كان X فضاء متجهيا منتهي البعد ، وكانت (e) قاعدة لـ X ، فبين أنه يمكن تعيين جداء داخلي على X تماما بقيمة $\gamma_k = (e_k, e_k)$ • هل يمكن اختيار الاعداد γ_k هذه بصورة كيفية تماما ؟

٢-٣ خواص اخرى لفضاءات الجداء الداخلي

ستحقق بادئ ذي بدء من أن (١) من البند السابق تعرف نظيما :

إن (١أ) و (٢أ) في البند ٢-٢ تبيجان من (جد ٤) • كذلك ، فاننا نحصل على (٣أ) بالافادة من (جد ٢) و (جد ٣) ، ذلك أن

$$\|ax\|^2 = \langle ax, ax \rangle = a\bar{a}\langle x, x \rangle = |a|^2 \|x\|^2.$$

وأخيرا فان (٤أ) ترد في ثانيا التمهيدية التالية •

١-٢-٣ تمهيدية (متباينة شقارتز ، متباينة المثلث) .

ان الجناء الداخلي والنظيم الناتج عنه يحققان متباينة شقارتز ومتباينة المثلث كما يلي :

(أ) لدينا

$$(1) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{متباينة شقارتز})$$

علما بان الشرط اللازم والكافي كي ترد اشارة التساوي في (1) هو ان تكون مجموعة مرتبطة خطيا .

(ب) ان هذا النظيم يحقق ايضا المتباينة

$$(2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{متباينة المثلث})$$

علما بان الشرط اللازم والكافي (*) كي ترد اشارة التساوي هو ان يكون $y = 0$ او $x = cy$ (c عدد حقيقي كما ان $c \geq 0$) .

البرهان :

(أ) اذا كان $y = 0$ ، فان صحة (1) نابعة من أن $\langle x, 0 \rangle = 0$. لنفترض أن $y \neq 0$. عندئذ نجد أنه أيا كان العدد α ، فان

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha [\langle y, x \rangle - \bar{\alpha} \langle y, y \rangle]. \end{aligned}$$

نلاحظ أن العبارة الواردة بين القوسين [] تساوي الصفر اذا اخترنا $\bar{\alpha} = \langle y, x \rangle / \langle y, y \rangle$. وما يتبقى من المتباينة هو

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2};$$

* لاحظ بان شرط التساوي هذا « متناظر » تماما بالنسبة لـ x و y ، ذلك ان المساواة $x = 0$ محتواة في المساواة $x = cy$ (عندما $c = 0$) ، وكذلك فان المساواة $y = kx$ محتواة في المساواة $x = cy$ (عندما يكون $k = 1/c$ و $c > 0$) .

حيث أفدنا من المساواة $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ • فإذا ضربنا بـ $\|y\|^2$ ، ونقلنا الحد الأخير إلى الطرف الأيسر ، ومن ثم جذرنا ، فالتنا نجد (1) •

أن الشرط اللازم والكافي كي ترد المساواة هنا هو أن يكون $y=0$ أو أن يكون $\|x-\alpha y\|^2=0$ ، وواضح أن المساواة الأخيرة تكافئ $x-\alpha y=0$ أو $x=\alpha y$ ، الأمر الذي يثبت الارتباط الخطي •

(ب) سنثبت الآن صحة (2) • لدينا

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2.$$

واستنادا إلى متباينة شقارتز فان

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

نجد اعتمادا على متباينة المثلث بالنسبة للأعداد أن

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ، نجد (2) •

أن الشرط اللازم والكافي كي ترد إشارة التساوي هنا هو أن يكون

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 2\|x\| \|y\|.$$

من الواضح أن الطرف الأيسر هو $2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ ، حيث يعني الرمز Re القسم الحقيقي (والذي يشكل الحرفين الأولين من الكلمة الانجليزية real ، التي تعني بالعربية كلمة «حقيقي») • نستنتج من هذا ومن (1) أن

$$(3) \quad \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \geq |\langle x, y \rangle|.$$

ولما كان القسم الحقيقي من عدد عقدي لا يمكن أن يكبر قيمته المطلقة ، فمن الضروري أن نجد مساواة تقتضي الارتباط الخطي اعتمادا على (أ) ، ولنفترض مثلا أن $y=0$ أو $x=cy$. سنبين أن c حقيقي وأنه أكبر من الصفر أو يساويه . نجد من (3) حيث نضع إشارة التساوي أن $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$. بيد أنه إذا كان القسم الحقيقي من عدد عقدي مساويا لقيمه المطلقة ، فلا بد أن يكون القسم التخيلي صفرا . لذا فإن $\langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \geq 0$ وفق (3) ، كما أن $c \geq 0$ ، وهذا ناتج من أن

$$0 \leq \langle x, y \rangle = \langle cy, y \rangle = c \|y\|^2.$$

أن متباينة شقارتز (1) بالغة الأهمية ، وسنستعملها في البراهين اللاحقة مرارا وتكرارا . كذلك ، فتمة خاصة كثيرة الاستعمال ، ألا وهي استمرار الجداء الداخلي الأمر الذي نوردته في التمهيدية التالية :

٢-٢-٣ تمهيدية (استمرار الجداء الداخلي)

إذا كان $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ في فضاء جداء داخلي ، فإن $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

البرهان :

إذا طرحنا وجمعنا الحد $\langle x_n, y \rangle$ ، واستعملنا متباينة المثلث المتعلقة بالأعداد ، وإذا استخدمنا أخيرا متباينة شقارتز ، فإننا نجد أن

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

وذلك لأن $y_n - y \rightarrow 0$ وكان $x_n - x \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$.

وكتطبيق أول لهذه التمهيدية ، فسنثبت أنه يمكن اتمام كل فضاء جداء داخلي . أن هذا الاتمام هو فضاء هيلبرت ، وهو وحيد إذا استثنينا

الايزومورفيزمات • وتعريف الايزومورفيزم في هذا السياق يتم على النحو التالي (كما سبق واقرحنا أثناء المناقشة الواردة في البند ٢-٨) :

إن الايزومورفيزم T لفضاء جداء داخلي X على فضاء داخلي \bar{X} على الحقل نفسه هو مؤثر خطي متباين وغامر $T: X \rightarrow \bar{X}$ يحفظ الجداء الداخلي ، بمعنى أنه إذا كان x و y أي عنصرين من X فإن

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

حيث رمزنا للجداءين الداخليين على X و \bar{X} بالرمز نفسه بقصد التبسيط • عندئذ يقال عن \bar{X} انه ايزومورفي مع X ، كما يقال عن X و \bar{X} انهما فضاءا جداء داخلي ايزومورفيان • لاحظ أن شروط التباين والغمر والخطية تضمن كون T ايزومورفيزم فضاء متجهي لـ X على \bar{X} ، بحيث أن T يحفظ البنية الكلية لفضاء الجداء الداخلي • ان T هو أيضا تطبيق ايزومتري (متساوي المسافة) لـ X على \bar{X} لان المسافات في X و \bar{X} تتحدد بالنظيمين المعرفين بالجداءين الداخليين على X و \bar{X} •

لهذا ، فإن مبرهنة الاتمام لفضاء جداء داخلي يمكن أن ينص عليها على النحو التالي :

٢-٢-٣ مبرهنة (الاتمام)

يوجد لاي فضاء جداء داخلي X فضاء لهبرت H وايزومورفيزم A من X على فضاء جزئي كثيف W في H • ان الفضاء H وحيد اذا ما استثنينا الايزومورفيزمات •

البرهان :

يوجد استنادا الى المبرهنة ٢-٣-٢ فضاء لباناخ H وتطبيق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من H كثيف في H • ولاسباب تعود الى الاستمرار ، فان المجاميع والمضاعفات العددية وفق هذا التطبيق لعناصر في X و W تتقابل

فيما بينها ، بحيث أن A هو ايزومورفيزم لـ X على W باعتبار كل منهما فضاء منظما . وتبين التمهيدية ٢-٢-٣ أنه يمكن تعريف جداء داخلي على H بأن نضع

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle,$$

حيث أوردنا الرموز نفسها كما في المبرهنة ٢-٣-٢ (وفي ٢-٦-١) ، أي أن (x_n) و (y_n) مثلان لـ x في H ولـ y في H أيضا على الترتيب . فإذا أدخلنا في اعتبارنا (9) و (10) من البند ١-٣ ، فالتنا نرى بأن A ايزومورفيزم لـ X على W ، وذلك باعتبارهما فضاءي جداء داخلي .

ان المبرهنة ٢-٣-٢ تضمن كذلك كون H وحيدا اذا ما استثنينا التطبيقات الايزومترية ، بمعنى أنه اذا كان H و \bar{H} إتمامين لـ X ، فانهما يرتبطان بتطبيق ايزومتري $T: H \rightarrow \bar{H}$. واذا أجرينا محاكمة مماثلة لما فعلناه في حالة A ، فالتنا نستخلص أن T يجب أن يكون ايزومورفيزما لفضاء هلبرت H على فضاء هلبرت \bar{H} . ■

يعرف **الفضاء الجزئي** Y من فضاء جداء داخلي X بأنه فضاء جزئي متجهي من X (البند ١-٢) مزود بالمقصود على $Y \times Y$ للجداء الداخلي المعروف على X .

وبصورة مماثلة ، فان **الفضاء الجزئي** Y من فضاء هلبرت H يعرف بأنه فضاء جزئي من H باعتباره فضاء جداء داخلي . لاحظ بأنه ليس من الضروري أن يكون Y فضاء هلبرت ، ذلك أن Y قد لا يكون تاما . وفي الحقيقة ، فالتنا نستنتج من المبرهنتين ١-٣-٢ و ٢-٤-٢ مباشرة الدعويين (أ) و (ب) الواردين في المبرهنة التالية :

٢-٢-٣ مبرهنة (الفضاء الجزئي)

ليكن Y فضاء جزئيا من فضاء هلبرت H . عندئذ تصح المعاوى التالية :

(٦) Y الشرط اللازم والكافي كي يكون Y تاما هو أن يكون مطلقا في H .

(ب) إذا كان Y منتهي البعد ، فإنه تام

(ج) إذا كان H فصولاً ، فإن Y يكون كذلك . وبوجه أعم ، فإن كل مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي فصول فصولة .
هذا ، وترك للقارئ القيام بسرد البرهان البسيط للشق (ج) .

مسائل

١ - ما هي متباينة شفارتز في \mathbb{R}^2 وفي \mathbb{R}^3 ؟ قدم برهاناً آخر لها في هاتين الحالتين .

٢ - أورد أمثلة لفضاءات جزئية من \mathbb{R}^2 .

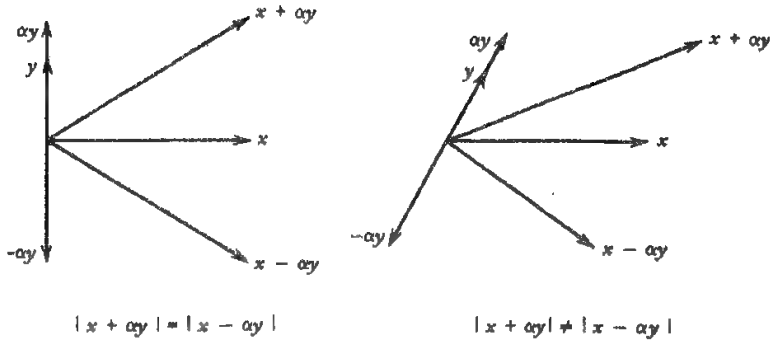
٣ - ليكن X فضاء جداء داخلي مؤلف من الحدودي $x=0$ (راجع الملاحظة الواردة في المسألة ٩ من البند ٢-٩) ومن كل الحدوديات الحقيقية في ، التي درجة كل منها لا تتجاوز 2 ، والمعرفة على $[a, b]$ ، حيث الجداء الداخلي هو ذاك المعرف بالمساواة (7) من البند ٣-١ . أثبت أن X تام .
ليكن Y مؤلفاً من جميع العناصر x من X بحيث أن $x(a)=0$. هل يشكل Y فضاء جزئياً من X ؟ وهل تشكل كل العناصر x من X التي درجة كل منها 2 فضاء جزئياً من X ؟

٤ - بين أن الشرطين $x \perp y$ و $x_n \rightarrow x$ معا يقتضيان أن $x \perp y$.

٥ - أثبت أنه إذا كانت (x_n) متتالية في فضاء جداء داخلي ، فإن الشرطين $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ و $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$ معا يقتضيان التقارب $x_n \rightarrow x$.

٦ - أثبت صحة الدعوى الواردة في المسألة ٥ وذلك في حالة المستوي العقدي .

٧ - برهن أنه في فضاء جداء داخلي ، فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المساواة $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ أيأ كان العدد α . (انظر الشكل ٢٥) .



الشكل (٢٥) • ايضاح المسألة ٧ في المستوي الاقليدي R^2

٨ - أثبت أنه في فضاء جداء داخلي ، يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون

• $x \perp y$ هو أن تتحقق المتباينة $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ أيا كان العدد α

٩ - ليكن V الفضاء المتجهي لجميع الدوال العقدية المستمرة على $J = [a, b]$

لنفترض أن $X_1 = (V, \|\cdot\|_\infty)$ حيث $\|x\|_\infty = \max |x(t)|$ ، وأن $X_2 = (V, \|\cdot\|_2)$ حيث

$$\|x\|_2 = (x, x)^{1/2}, \quad (x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt.$$

أثبت أن التطبيق المطابق $x \mapsto x$ لـ X_1 على X_2 مستمر • (هذا التطبيق

ليس هوميومورفيزما ، ظرا لكون X_2 غير تام) •

١٠ - (المؤثر الصفري) • ليكن $T: X \rightarrow X$ مؤثرا خطيا محدودا على فضاء

جداء داخلي عقدي X • فإذا كان $\langle Tx, x \rangle = 0$ أيا كان x من X ، فأثبت أن

• $T = 0$

بين أن هذا غير صحيح في حالة فضاء جداء داخلي حقيقي • إرشاد

خذ دورانا للمستوي الاقليدي •

٣-٣ التتمات المعامدة والمجاميع المباشرة

تعرف المسافة δ بين عنصر x في فضاء متري X ومجموعة جزئية غير خالية M في X بأنها

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in M} d(x, \bar{y}) \quad (M \neq \emptyset).$$

وتغادر هذه المساواة ، في فضاء منظم على الشكل التالي :

$$(1) \quad \delta = \inf_{\bar{y} \in M} \|x - \bar{y}\| \quad (M \neq \emptyset).$$

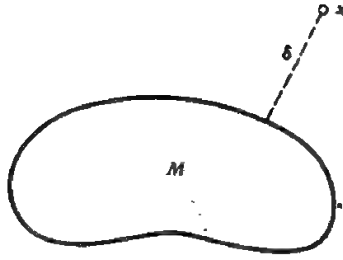
ويعطي الشكل ٢٦ مثالا ايضاحيا بسيطا .

وسنرى بأنه من المهم معرفة ما اذا كان هنالك عنصر y من M بحيث أن

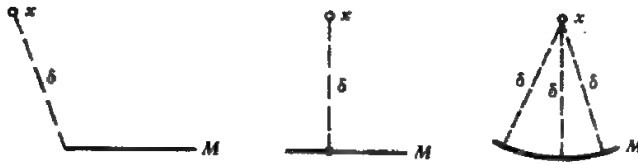
$$(2) \quad \delta = \|x - y\|,$$

وهذا يعني ببساطة وجود نقطة y من M هي أقرب ما يكون الى نقطة معطاة x ، واذا وجدت مثل هذه النقطة ، فهل هي وحيدة ؟ وواضح أننا هنا في سياق مسألة وجود ووحداية . وهذه المسألة بالغة الاهمية من الوجهتين النظرية والتطبيقية ، اذ أننا نقابلها مثلا في سياق دراستنا لموضوع تقريب الدوال .

ويشير الشكل ٢٧ الى أنه حتى في حالة جد بسيطة كحالة المستوي الاقليدي \mathbb{R}^2 ، فقد لانجد نقطة y تحقق (2) ، أو أنه توجد نقطة واحدة فقط y ، أو أنه يوجد أكثر من نقطة واحدة y . وقد نتوقع بأن الامر سيكون أعقد بدرجة كبيرة في فضاءات أخرى ، وبوجه خاص في الفضاءات غير منتهية البعد . وفعلا ، فان هذا هو الواقع في الفضاءات المنظمة العامة (كما سنرى في الفصل السادس) . في حين أن الوضع يبقى بسيطا نسبيا في فضاءات هيلبرت . ان هذه الحقيقة مثيرة للدهشة ، ولها نتائج متنوعة من الوجهتين النظرية والتطبيقية ، وهي تشكل احدي الاسباب الرئيسية التي تعمل ببساطة فضاءات هيلبرت اذا ما قورنت بفضاءات باناخ العامة .



الشكل (٢٦) • ايضاح (١) في حالة المستوي R^2



(يوجد عدد غير منته
من النقاط y)
(توجد y وحيدة)
(y غير موجودة)

الشكل (٢٧) • وجود ووحدانية نقاط y من M محققة للشرط (٢) ،
حيث M قطعة مستقيمة مفتوحة في R^2 في الشكلين الايسر والاوسط
وقوس دائرة في الشكل اليمين

ولحل مسألة الوجود والوحدانية في فضاءات هيلبرت ، وصياغة المبرهنة
الرئيسية ٣-٣-١ (الواردة بعد قليل) ، فانه يلزمنا مفهومين لهما أهمية كبيرة ،
نوردهما فيما يلي :

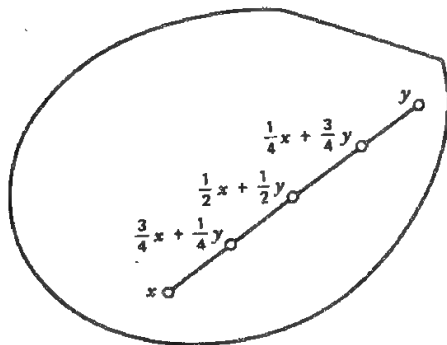
تعرف القطعة المستقيمة الواصلة بين عنصرين x و y من فضاء متجهي X
بأنها مجموعة كل العناصر z من X من الشكل

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y \quad (\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1).$$

ويقال عن مجموعة جزئية M من X انها محدبة اذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة
بين أي نقطتين x و y في M محتواة في M • ويعطي الشكل ٢٨ مثالا بسيطا على
مجموعة محدبة •

وعلى سبيل المثال ، فان كل فضاء جزئي Y من X محدب ، كما أن تقاطع
مجموعات محدبة هو مجموعة محدبة •

بعد هذا يمكننا أن نورد الاداة الرئيسية في هذا الفصل المتمثلة بالمبرهنة التالية :



الشكل (٢٨) . مثال ايضاحي لقطعة مستقيمة في مجموعة محدبة

١-٢-٣ مبرهنة (المتجه المتصغير) .

ليكن X فضاء جداء داخلي ، ولتكن M مجموعة جزئية غير خالية ومحدبة وتامة (بالنسبة للمتراك الحدود بالجداء الداخلي) . عندئذ يوجد لكل عنصر x من X عنصر وحيد y من M بحيث يكون

$$(3) \quad \delta = \inf_{\bar{y} \in M} \|x - \bar{y}\| = \|x - y\|.$$

البرهان :

(١) الوجود . نجد استنادا الى تعريف الحد الادنى أن ثمة متتالية (\bar{y}_n) في M بحيث أن

$$(4) \quad \delta_n \longrightarrow \delta \quad \text{و} \quad \delta_n = \|x - y_n\|.$$

سنبين أن (y_n) هي متتالية كوشي . فاذا وُضِعنا $y_n - x = v_n$ ، نجد أن $\|v_n\| = \delta_n$

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2 \left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\| \geq 2\delta$$

وذلك لكون M محدبة ، الامر الذي يقتضي أن $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$. كذلك ، فلدينا $y_n - y_m = v_n - v_m$. لذا فانه يترتب على مساواة متوازي الاضلاع أن

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \\ &\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2),\end{aligned}$$

وبالتالي فان (4) تقتضي أن تكون (y_n) متوالية كوشي . ولما كانت M تامة ، فان (y_n) متقاربة ، ولنفترض مثلاً أن $y_n \rightarrow y \in M$. وبما أن $y \in M$ ، فان $\|x - y\| \geq \delta$. كذلك ، فاننا نجد اعتماداً على (4) أن

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \rightarrow \delta.$$

وهذا يبين أن $\|x - y\| = \delta$.

(ب) **الوحدانية** . سنفترض أن العنصرين y و y_0 في M يحققان المساواتين

$$\|x - y\| = \delta \quad \text{و} \quad \|x - y_0\| = \delta$$

ونبين من ثم أن $y_0 = y$. نلاحظ استناداً الى مساواة متوازي الاضلاع أن

$$\begin{aligned}\|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2 \|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\|^2.\end{aligned}$$

وبما أن المقدار $\frac{1}{2}(y + y_0)$ الموجود في الطرف الايمن ينتمي الى M ، فان

$$\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\| \geq \delta.$$

يترتب على هذا أن الطرف الايمن أصغر من المقدار $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$ أو يساويه . لذا فاننا نجد المتباينة $\|y - y_0\| \leq 0$. وبما أن لدينا دوماً $\|y - y_0\| \geq 0$ ، فانه يجب أن تقع على المساواة $\|y - y_0\| = 0$ ، التي تكافئ كون $y_0 = y$. ■

إذا انتقلنا من المجموعات المحدبة الكيفية الى فضاءات جزئية ، فأننا نجد تمهيدية تعميم الفكرة المألوفة في الهندسة الابتدائية والتي تنص على أنه يمكن إيجاد النقطة الوحيدة y في فضاء جزئي معطى Y والتي هي أقرب ما يكون الى نقطة ما x « باسقاط عمود من x على Y » .

٢-٣-٣ تمهيدية (التعامد)

لنفترض في البرهنة ١-٣-٣ أن M فضاء جزئي تام Y وأن x نقطة مثبتة في X . عندئذ يكون $z = x - y$ عموديا على Y .

البرهان :

إذا لم يصح كون $z \perp Y$ ، لوجدت نقطة y_1 من Y بحيث أن

$$(5) \quad \langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0.$$

من الواضح أن $y_1 \neq 0$ ، ذلك أنه إذا لم يتحقق هذا الامر لكان $\langle z, y_1 \rangle = 0$.
وفضلا عن ذلك ، نرى أنه إذا كان α عددا ما ، فإن

$$\begin{aligned} \|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha [\langle y_1, z \rangle - \bar{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle] \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \beta - \alpha [\bar{\beta} - \bar{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle]. \end{aligned}$$

إن المقدار المحصور بين القوسين [...] يغدو صفرا إذا افترضنا أن

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}.$$

يترتب على (3) أن $\|z\| = \|x - y\| = \delta$ ، وبالتالي فإن معادلتنا تقتضي أن يكون

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2.$$

ولما كان هذا أمرا غير ممكن لأننا نجد عندئذ أن

$$y_2 = y + \alpha y_1 \in Y \quad \text{حيث} \quad z - \alpha y_1 = x - y_2$$

فان $\|z - ay\| \geq \delta$ وفق تعريف δ . لذا لا يمكن أن تتحقق (5) ، والتسميدية صحيحة . ■

ان هدفنا هو تمثيل لفضاء هيلبرت على شكل مجموع مباشر بسيط وملائم لانه يفيد من التعامد . ولاستيعاب هذا الوضع وفهم هذه المسألة ، سنقدم أولا مفهوم المجموع المباشر . ان هذا المفهوم ذو معنى في حالة أي فضاء متجهي ونورده على النحو التالي .

٣-٣-٣ تعريف (المجموع المباشر)

يقال عن فضاء متجهي X انه مجموع مباشر لفضاءين جزئيين Y و Z من X ، ونكتب

$$X = Y \oplus Z,$$

اذا كان لكل عنصر x من X تمثيل وحيد بالشكل

$$x = y + z \quad y \in Y, z \in Z.$$

وعندئذ يسمى Z **المتتم الجبري** لـ Y في X ، وبالعكس ، كما يقال عن Y و Z انهما زوج متتام من الفضاءات الجزئية من X . ■

وعلى سبيل المثال ، ان $Y = \mathbb{R}$ فضاء جزئي من المستوي الاقليدي \mathbb{R}^2 . ومن الواضح أنه يوجد لـ Y عدد غير منته من المتتمات الجبرية في \mathbb{R}^2 ، كل منها محور حقيقي ، بيد أن أكثرها ملاءمة هو المتتم العمودي على Y . ويستفاد من هذا لدى اختيارنا جملة احداثية ديكرتية . كذلك ، فاننا نجد الوضع نفسه من وجهة المبدأ في \mathbb{R}^3 .

وبصورة مماثلة ، فان اهتمامنا الرئيسي في حالة فضاء هيلبرت العام H ينصب على تمثيل H بمجموع مباشر لفضاء جزئي مغلق Y ومتممه المعامد

$$Y^\perp = \{z \in H \mid z \perp Y\},$$

الذي يتألف من مجموعة كل المتجهات العمودية على Y • وهذا يمدنا بالنتيجة الرئيسية لهذا البند ، والتي تدعى أحيانا مبرهنة الإسقاط لأسباب سنقوم بشرحها بعد البرهان •

٢-٣-٤ مبرهنة (المجموع المباشر)

ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هيلبرت H • عندئذ يكون

$$(6) \quad H = Y \oplus Z \quad Z = Y^\perp$$

البرهان :

لما كان H تاما و Y مغلقا ، فإن Y تام كما تبين المبرهنة ١-٤-٧ • وبما أن Y محدب ، فإنه يترتب على المبرهنة ٣-٣-١ والتمهيدية ٣-٣-٢ أنه يوجد لكل x في H عنصر y من Y بحيث يكون

$$(7) \quad x = y + z \quad z \in Z = Y^\perp$$

ولأثبت الوحداية ، نفترض أن

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

حيث y و y_1 عنصران من Y وحيث z و z_1 عنصران من Z • وعندئذ يكون $y - y_1 = z_1 - z$ • وبما أن $y - y_1$ عنصر من Y في حين أن $z_1 - z$ عنصر من Z الذي يساوي Y^\perp ، فإننا نستنتج أن $y - y_1 \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$ ، الأمر الذي يقتضي أن يكون $y = y_1$ • لذا فإن $z = z_1$ أيضا • ■

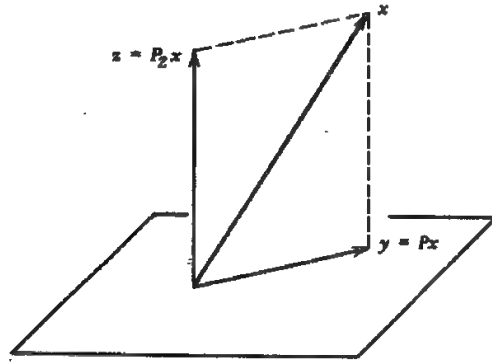
يسمى العنصر y الوارد في (7) المسقط العمودي لـ x على Y • (أو اختصارا مسقط x على Y) • وقد استوحينا هذه التسمية من الهندسة الابتدائية • [وعلى سبيل المثال ، يمكن أن نأخذ $H = \mathbb{R}^2$ ونسقط أي نقطة $x = (\xi_1, \xi_2)$ على المحور ξ_1 ، الذي يلعب عندئذ دور Y ، ونجد حينئذ أن $y = (\xi_1, 0)$] •

تحدد المعادلة (7) التطبيق

$$P: H \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y = Px.$$

ويسمى التطبيق P هذا المسقط (العمودي) ، أو مؤثر الإسقاط ، لـ H على Y .
(انظر الى الشكل ٢٩) • من الواضح أن P مؤثر خطي محدود ، كما أنه تطبيق



الشكل (٢٩) • ايضاح يتعلق بالبرهنة ٣-٣-٤ والمستور (9)

لـ H على Y ،

ولـ Y على Y نفسه ،

• ولـ $Z = Y^\perp$ على $\{0\}$.

وهو تطبيق مراوح ، أي أن

$$P^2 = P;$$

وهكذا ، فاننا نجد أيا كان x من H أن

$$P^2 x = P(Px) = Px.$$

وبالتالي فإن $P|_Y$ هو التطبيق المطابق على Y . وفي الحالة $Z=Y^\perp$ ، فإن
يترتب على هذه المناقشة التمهيدية التالية :

٣-٥ تمهيدية (الفضاء الصفري)

ان المتمم المعامد Y^\perp لفضاء جزئي مغلق Y في فضاء هيلبرت H هو الفضاء
الصفري $N(P)$ للمسقط المعامد P لـ H على Y .

ان المتمم المعامد هو عادم خاص ، ونعني بالعادم M^\perp لمجموعة غير خالية M
في فضاء جداء داخلي X المجموعة

$$M^\perp = \{x \in X \mid x \perp M\}.$$

وهكذا فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in M^\perp$ هو أن يكون $\langle x, v \rangle = 0$
أيما كان v في M . وهذا يفسر سبب اسم « العادم » .

لاحظ بأن M^\perp فضاء متجهي ، ذلك أنه اذا كان x و y عنصرين من M^\perp ،
فاننا نستنتج أنه أيما كان v من M ، وأيما كان العددان α و β فان

$$\langle \alpha x + \beta y, v \rangle = \alpha \langle x, v \rangle + \beta \langle y, v \rangle = 0,$$

وبالتالي فان $\alpha x + \beta y \in M^\perp$.

ان المجموعة M^\perp مغلقة ، الامر الذي تترك اثباته للقارئ (المسألة ٨) .

سنرمز لـ $(M^\perp)^\perp$ بـ $M^{\perp\perp}$ ، .. وهكذا . ونجد بوجه عام أن

$$(8^*) \quad M \subset M^{\perp\perp}$$

لان

$$x \in M \implies x \perp M^\perp \implies x \in (M^\perp)^\perp.$$

أما في حالة الفضاءات الجزئية المغلقة ، فاننا نجد النتيجة الاقوى التالية :

٦-٣-٣ تمهيدية (الفضاء الجزئي المفلق)

إذا كان Y فضاء جزئيا مفلقا في فضاء هلبرت H ، فإن

$$Y = Y^{\perp\perp}. \quad (8)$$

البرهان :

ان $Y \subset Y^{\perp\perp}$ وفق (8*) . سنبين الآن أن $Y = Y^{\perp\perp}$. ليكن x عنصرا من $Y^{\perp\perp}$. عندئذ يترتب على ٣-٣-٤ أن $x = y + z$ ، حيث $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ وفق (8*) . ولما كان $Y^{\perp\perp}$ فضاء متجهيا وكان x عنصر من $Y^{\perp\perp}$ فرضا ، فاننا نجد أيضا أن $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$ ، وبالتالي فإن $z \perp Y^{\perp}$. وبما أن $z \in Y^{\perp}$ استنادا الى ٣-٣-٤ ، فاننا نجد مما سبق العلاقة $z \perp z$ التي تقتضي أن يكون $z = 0$ ، أي أن $x = y$ ، وهذا يعني أن $x \in Y$. ولما كان العنصر x المنتمي الى $Y^{\perp\perp}$ اختياريا ، فإن هذا يبين أن $Y = Y^{\perp\perp}$. ■

ان المساواة (8) هي السبب الرئيسي في استعمالنا الفضاءات الجزئية المفلقة في هذا السياق . وبما أن $Z^{\perp\perp} = Y^{\perp\perp} = Y$ ، فانه يمكن كتابة الدستور (6) بالشكل

$$H = Z \oplus Z^{\perp}.$$

يترتب على هذا أن $x \mapsto z$ يحدد مؤثر الاسقاط (انظر الى الشكل ٢٩)

$$P_Z: H \longrightarrow Z \quad (9)$$

لـ H على Z ، وخواص هذا المؤثر شبيهة تماما بخواص المؤثر P الذي درسناه فيما سبق .

تقتضي البرهنة ٣-٣-٤ مباشرة صفة مميزة لتلك المجموعات M في فضاء هلبرت التي يكون $\text{span } M$ لها مجموعة كثيفة ، الامر الذي تحدده التمهيدية التالية :

٧-٣-٣ تمهيدية (المجموعة الكثيفة)

إذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H ، فإن الشرط اللازم

والكافي كي تكون $\text{span } M$ مجموعة كثيفة في H هو أن يكون $M^{\perp} = \{0\}$.

البرهان :

(أ) ليكن x عنصرا من M^\perp ، ولنفترض أن $V = \text{span } M$ كثيفة في H .
عندئذ يكون $x \in \bar{V} = H$. واستنادا الى الشق (أ) من المبرهنة ١-٤-٦ ، فانه
توجد متتالية (x_n) في V بحيث أن $x_n \rightarrow x$. وبما أن $x \in M^\perp$ وأن $M^\perp \perp V$ ،
فاننا نجد أن $(x_n, x) = 0$. نستنتج من هذا بناء على استمرار الجداء الداخلي
(التجهدية ٣-٢-٢) أن $(x_n, x) \rightarrow (x, x)$. لذا فإن $(x, x) = \|x\|^2 = 0$ ، الامر
الذي يقتضي المساواة $x = 0$. وبما أن x عنصر اختياري من M^\perp ، فاننا نجد
أن $M^\perp = \{0\}$.

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن $M^\perp = \{0\}$. فاذا كان $x \perp V$ ، فإن $x \perp M$ ،
أي أن $x \in M^\perp$ ، وبالتالي فإن $x = 0$. لذا فإن $V^\perp = \{0\}$. واذا لاحظنا أن V
فضاء جزئي من H ، فاننا نجد أن $\bar{V} = H$ استنادا الى ٣-٣-٤ حيث نفترض
أن $Y = \bar{V}$ ■

مسائل

١ - ليكن H فضاء هلبرت و M مجموعة جزئية محدبة في H ، و (x_n) متتالية
في M بحيث أن $\|x_n\| \rightarrow d$ ، حيث $d = \inf_{x \in M} \|x\|$. بين بأن (x_n) متقاربة في
 H . أورد مثالا يوضح هذا في \mathbb{R}^2 أو في \mathbb{R}^3 .

٢ - برهن أن المجموعة الجزئية $M = \{y = (\eta_j) \mid \sum \eta_j = 1\}$ في الفضاء العقدي \mathbb{C}^n
(راجع ٣-١-٤) تامة ومحدبة ، أوجد متجه التنظيم الاصغري في M .

٣ - (أ) بين أن الفضاء المتجهي X لكل الدوال الحقيقية المستمرة على $[-1, 1]$
هو المجموع المباشر لمجموعة كل الدوال المستمرة الزوجية ومجموعة كل
الدوال المستمرة الفردية على $[-1, 1]$. (ب) أورد أمثلة لتمثيلات لـ \mathbb{R}^3 على
شكل مجموع مباشر (i) لفضاء جزئي ولتممه المعامد ، (ii) لزوج من
الفضاءات الجزئية المتتامه .

٤ - (أ) بين بأن نتيجة المبرهنة ٣-٣-١ تظل سارية في حالة كون X فضاء هلبرت و M فضاء جزئيا مغلقا في X . (ب) كيف يمكن استخدام متطابقة ابولونيوس (الواردة في المسألة ٥ من البند ٣-١) في اثبات المبرهنة ٣-١-٣ ؟

٥ - ليكن $X = \mathbb{R}^2$. أوجد M^\perp في كل من الحالات التالية : (أ) $M = \{x\}$ ، حيث $x = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$ ، (ب) $M = \{x_1, x_2\}$ ، حيث $\{x_1, x_2\}$ جملة مستقلة خطيا في X .

٦ - أثبت أن $Y = \{x \mid x = (\xi_n) \in l^2, \xi_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ فضاء جزئي مغلق في l^2 ، ثم جد Y^\perp . حدد Y^\perp إذا كان $Y = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} \subset l^2$ حيث $e_j = (\delta_{jk})$.

٧ - لتكن A و $B \supset A$ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين في فضاء جداء داخلي X . بين أن

$$(A^\perp)^\perp = A^\perp \quad (\text{ج}) , \quad B^\perp \subset A^\perp \quad (\text{ب}) , \quad A \subset A^{\perp\perp} \quad (\text{أ})$$

٨ - بين بأن العادم M^\perp لمجموعة غير خالية M في فضاء جداء داخلي X هو فضاء جزئي مغلق في X .

٩ - أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء هلبرت H مغلقا في H هو أن يكون $Y = Y^{\perp\perp}$.

١٠ - إذا كانت M أي مجموعة جزئية غير خالية من فضاء هلبرت H ، فبين بأن المجموعة $M^{\perp\perp}$ هي أصغر فضاء جزئي مغلق في H يحوي M ، أي أن $M^{\perp\perp}$ محتواة في كل فضاء جزئي مغلق Y من H يحقق الشرط $Y \supset M$.

٣-٤ المجموعات والمتتاليات المتعامدة المنظمة

إن التعامد ، كما سبق وعرفناه في البند ٣-١ ، يلعب دورا أساسيا في فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت . وقد لمسنا هذه الحقيقة أولا في

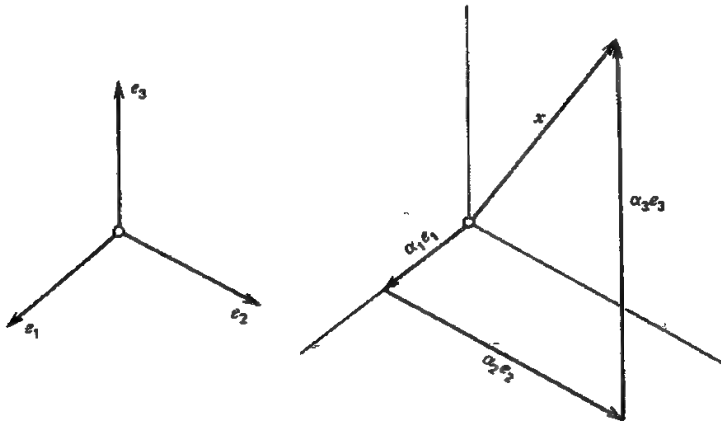
البند السابق • وتهننا بوجه خاص تلك المجموعات التي عناصرها متعامدة متنى •
 • وكى تفهم ما يعنيه هذا ، سنعيد الى الذاكرة أمرا معروفا في الفضاء الاقليدي \mathbb{R}^3 •
 ففي الفضاء \mathbb{R}^3 ، تكون مجموعة من هذا النوع المجموعة المؤلفة من ثلاثة متجهات
 واحدة وفق الاتجاهات الموجبة للمحاور في جملة احداثية متعامدة ، ولنرمز
 لهذه المتجهات e_1, e_2, e_3 • تشكل هذه المتجهات قاعدة لـ \mathbb{R}^3 ، وبالتالي فكل
 عنصر x من \mathbb{R}^3 تمثيل وحيد من النمط

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

كما في الشكل ٣٠ • ونرى الآن فائدة جلى للتعامد • فاذا أعطينا x ، فإنه يمكننا
 أن نعين مباشرة المعاملات المجهولة α_1 و α_2 و α_3 بأخذ الجداءات الداخلية •
 وفي الحقيقة ، فاننا نجد α_1 بضرب تمثيل x بـ e_1 ، أي أن

$$\langle x, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha_3 \langle e_3, e_1 \rangle = \alpha_1,$$

وهكذا • توجد في فضاءات الجداء الداخلي الاعم امكانات مماثلة أخرى
 لاستعمال المجموعات والمتتاليات المتعامدة والمتعامدة المنظمة ، الامر الذي



الشكل (٣٠) • المجموعة المتعامدة $\{e_1, e_2, e_3\}$ في \mathbb{R}^3 والتمثيل $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

سنوضحه بعد قليل . وفعلًا فإن استعمال مثل هذه المجموعات والمتتاليات يؤلف جزءًا أساسيًا من نظرية فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبيرت بأكملها . وسنبتدىء دراستنا لهذا الأمر بإدراج المفاهيم الضرورية .

٣-١-٢ (المجموعات والمتتاليات المتعامدة المنظمة)

المجموعة المتعامدة M في فضاء جداء داخلي X هي مجموعة جزئية M من X عناصرها متعامدة متنى . أما **المجموعة المتعامدة المنظمة** M في X فهي مجموعة متعامدة في X ظيم كل من عناصرها يساوي 1 ، أي أنه إذا كان x و y أي عنصرين من M فإن

$$(1) \quad \langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq y \\ 1 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

وإذا كانت مجموعة M متعامدة أو متعامدة منظمة وكانت M عدودة (أي قابلة للعد) ، فيمكننا أن نرتبها في متتالية (x_n) ندعوها متتالية متعامدة أو متعامدة منظمة على الترتيب .

وبوجه أعم ، فإنه يقال عن مجموعة ذات أدلة ، أي عن الجماعة (x_α) ، $\alpha \in I$ ، أنها متعامدة إذا كان $x_\alpha \perp x_\beta$ أيًا كان العنصران المختلفان α ، β من I . وتسمى هذه الجماعة متعامدة منظمة إذا كانت متعامدة وكان ظيم كل x_α يساوي 1 ، وعندئذ نجد أنه أيًا كان α و β من I فإن

$$(2) \quad \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{if } \alpha = \beta. \end{cases}$$

ويرمز $\delta_{\alpha\beta}$ هنا الى دلتا كرونكر ، كما سبق وذكرنا في البند ٢-٩ . ■

وإذا احتاج القارئ الى المزيد من المعلومات حول الجماعات والمفاهيم المرتبطة بها ، فعليه أن يرجع الى A1.3 من الملحق 1 الوارد في آخر هذا الكتاب . وعندها سيلحظ أن المفاهيم الواردة في التعريف السابق قريبة أحدها

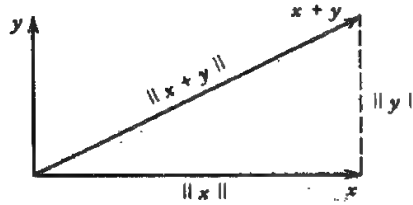
من الآخر • وسبب ذلك يعود الى أنه يمكن أن نجد دائما لكل مجموعة جزئية

- M من X جماعة من عناصر X بحيث تكون مجموعة عناصر الجماعة هي M
- وبوجه خاص ، يمكن أخذ الجماعة المعرفة بالتطبيق المتباين الطبيعي لـ M في X ، أي المقصور على M للتطبيق المطابق $x \mapsto x$ على X

سنبحث الآن في بعض الخواص البسيطة للمجموعات المتعامدة والمتعامدة المنظمة كما سنورد أمثلة عليها •

إذا كان x و y عنصرين متعامدين ، فالتنا $\langle x, y \rangle = 0$ ، الامر الذي يعطي رأسا علاقة فيثاغورس

$$(3) \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



الشكل (٣١) • علاقة فيثاغورس (3) في \mathbb{R}^2

ويبين الشكل ٣١ مثالا مألوفاً • وبشكل أعم ، فإذا كانت مجموعة متعامدة ، فإن

$$(4) \quad \|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

وفعلا ، فإن $\langle x_j, x_k \rangle = 0$ إذا كان $j \neq k$ ، لذا فإن

$$\left\| \sum_j x_j \right\|^2 = \left\langle \sum_j x_j, \sum_k x_k \right\rangle = \sum_j \sum_k \langle x_j, x_k \rangle = \sum_j \langle x_j, x_j \rangle = \sum_j \|x_j\|^2$$

(يتم الجمع من 1 حتى n) • كذلك ، فالتنا نجد ما يلي :

٢-٤-٣ تمهيدية (الاستقلال الخطي)

المجموعة المتعامدة المنظمة مستقلة خطيا .

البرهان :

لتكن $\{e_1, \dots, e_n\}$ متعامدة منظمة ، ولننظر في المعادلة

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

فاذا ضربنا بالمتجه المثبت e_j ، نجد أن

$$\left\langle \sum_k \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_k \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0$$

وهذا يثبت الاستقلال الخطي لكل مجموعة متعامدة منظمة منتهية . ويقضي هذا أيضا الاستقلال الخطي في حالة كون المجموعة المتعامدة المنظمة المعطاة غير منتهية ، وذلك وفق تعريف الاستقلال الخطي الذي أوردناه في البند ١-٢ . ■

أمثلة

٢-٤-٣ الفضاء الاقليدي R^3

ان المتجهات الواحدية الثلاثة $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ باتجاه المحاور الثلاثة في جملة احداثية متعامدة في الفضاء R^3 تشكل مجموعة متعامدة منظمة .
(انظر الى الشكل ٣٠) .

٢-٤-٣ الفضاء I^2

ان (e_n) ، بفرض أن $e_n = (\delta_{nj})$ (حيث العنصر الذي ترتيبه n يساوي 1 ، والعناصر الاخرى اصفار) ، تشكل متتالية متعامدة منظمة في الفضاء I^2 .
(راجع البند ٣-١-٦) .

٣-٤-٥ الدوال المستمرة

ليكن X فضاء الجداء الداخلي المؤلف من كل الدوال المستمرة على $[0, 2\pi]$ ، والمزودة بالجداء الداخلي المعروف بالمساواة

$$(x, y) = \int_0^{2\pi} x(t)y(t) dt$$

(راجع ٣-١-٥) • إن (u_n) ، حيث

$$u_n(t) = \cos nt \quad n = 0, 1, \dots$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة في X • كذلك ، فإن (v_n) ، حيث

$$v_n(t) = \sin nt \quad n = 1, 2, \dots$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة أخرى في X •

وفي الحقيقة ، فإنا نجد بعد المكاملة أن

$$(5) \quad (u_m, u_n) = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 1, 2, \dots \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{إذا كان} \\ \text{إذا كان} \\ \text{إذا كان} \end{array}$$

ونجد نتيجة مماثلة لـ (v_n) • لذا فإن (e_n) ، حيث

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة • ومن (v_n) نجد متتالية متعامدة منظمة (\bar{e}_n) ، حيث

$$\bar{e}_n(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n\|} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

لاحظ أننا نجد هنا أن $u_m \perp v_n$ أيا كان m و n (أورد البرهان على هذا) . وترد هذه المتتاليات في متسلسلة فورييه ، الامر الذي سنناقشه في البند القادم . وهذه الامثلة كافية لاعطاء انطباع أولي عن هذا الموضوع . وسنورد متتاليات متعامدة منظمة أخرى ذات أهمية تطبيقية في البند ٣-٧-١ ■

ان المتتاليات المتعامدة المنظمة تمتاز على المتتاليات الكيفية المستقلة خطيا بالامر التالي : اذا علمنا بأن عنصرا ما x يمكن أن يمثل بتركيب خطي لبضعة عناصر من متتالية متعامدة منظمة ، فان صفة التعامد والنظامية تجعل من التعمين الفعلي للمعاملات عملية بسيطة . وفي الحقيقة ، فاذا كانت (e_1, e_2, \dots) متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، وكان $x \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ ، حيث n مثبت ، فاننا نجد استنادا الى تعريف span (البند ٢-١) أن

$$(6) \quad x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

واذا أخذنا الجداء الداخلي بضرب طرفي هذه المساواة بالمتجه المثلث e_j ، فاننا نجد أن

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j.$$

وبالتالي فان (6) تغدو بالشكل

$$(7) \quad x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

وهذا يبين بأن تعيين المعاملات المجهولة في (6) أمر سهل . وثمة ميزة أخرى لصفة التعامد والنظامية تلخص في أنه اذا أردنا أن نضيف في (6) و (7) حدا آخر $\alpha_{n+1} e_{n+1}$ بهدف دراسة

$$\bar{x} = x + \alpha_{n+1} e_{n+1} \in \text{span}\{e_1, \dots, e_{n+1}\};$$

فاننا نحتاج عندئذ لحساب معامل واحد اضافي فقط ، ذلك أن المعاملات الاخرى تبقى على حالها .

وبوجه أعم ، اذا كان x عنصرا ما من X غير منتم بالضرورة الى $Y_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ ، فمن الممكن تعيين y من Y_n بوضع

$$(8a) \quad y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k,$$

حيث n عنصر مثبت ، كما في السابق ، ومن ثم تعيين z بوضع

$$(8b) \quad x = y + z,$$

أي أن $z = x - y$. سنبين أن $z \perp y$. ولفهم حقيقة ما يجري ، نلاحظ أن كل y من Y_n هو تركيب خطي

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

حيث $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle$ ، الامر الذي ينتج باتباع أسلوب المناقشة الذي سلكناه قبل قليل . وما ندعيه هو أنه لكل اختيار خاص لـ $k=1, \dots, n$ فاننا نجد y بحيث يكون $z = x - y \perp y$.

ولاثبات هذا نلاحظ أولا أنه يترتب على التعامد والنظامية أن

$$(9) \quad \|y\|^2 = \left\langle \sum \langle x, e_k \rangle e_k, \sum \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

وبالافادة من هذا ، يمكننا الان أن نثبت بأن $z \perp y$:

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \left\langle x, \sum \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - \|y\|^2 \\ &= \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum |\langle x, e_k \rangle|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

وبالتالي فإن علاقة فيثاغورس (3) تعطي بالمساواة

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \quad (10)$$

ويترتب على (9) أن

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum |\langle x, e_k \rangle|^2. \quad (11)$$

ولما كان $\|z\| \geq 0$ ، فإننا نجد لكل $n = 1, 2, \dots$ أن

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (12^*)$$

إن الحدود المجموعة هنا غير سالبة ، وبالتالي فإن المجاميع في الطرف الايسر تشكل متتالية رتيبة متزايدة . وهذه المتتالية متقاربة نظرا لكونها محدودة بالعدد $\|x\|^2$. ولما كانت هذه المتتالية هي متتالية المجاميع الجزئية من متسلسلة غير منتهية ، فإن هذه المتسلسلة متقاربة . وبالتالي فإن (12*) تقتضي التالي :

٣-٤-٦ مبرهنة (متباينة بسل)

إذا كانت (e_k) متتالية متعامدة منظمه في فضاء جداء داخلي X ، فإننا نجد انه إما كان x من X المتباينة التالية

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{متباينة بسل} \quad (12)$$

تدعى الجداءات الداخلية $\langle x, e_k \rangle$ في (12) بمعاملات فورييه للعنصر x بالنسبة للمتتالية المتعامدة المنظمة (e_k) .

لاحظ أنه إذا كان x غير منتهي البعد ، فإن كل مجموعة متعامدة ومنظمة في X يجب أن تكون منتهية نظرا لأنها مستقلة خطيا استنادا الى ٣-٤-٢ . لذا فإننا نجد في (12) عندئذ مجموعا منتهيا .

رأينا أن المتتاليات المتعامدة والمنظمة هي من النوع الذي يسهل التعامل معه . وسنشرح الآن مسألة عملية تتعلق بكيفية الحصول على متتالية متعامدة ومنظمة عندما تعطى سلفا متتالية كيفية مستقلة خطيا . ويمكن القيام بهذا بإجراء

انشائي يسمى طريقة جرام - شميت في تحويل متتالية مستقلة خطيا (x_i) في فضاء جداء داخلي الى متتالية متعامدة - منظمة . وللمتتالية المتعامدة المنظمة (e_i) الحاصلة خاصة تلخص في أنه أيا كان n فان

$$\text{span} \{e_1, \dots, e_n\} = \text{span} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

وتتم الطريقة وفق الخطوات التالية :

الخطوة الاولى . المتجه الاول من (e_k) هو

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1.$$

الخطوة الثانية . يمكن كتابة x_2 بالشكل

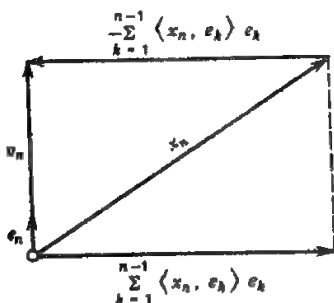
$$x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2.$$

عندها يكون (كما في الشكل ٣٢) المتجه

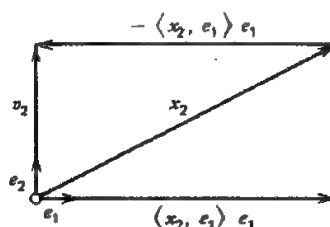
$$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$$

مغايرا للمتجه الاول في المتتالية المستقلة خطيا ، كذلك فان $v_2 \perp e_1$ نظرا لكون $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$. فالتالي في الخطوة الثالثة نأخذ

$$e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2.$$



الشكل (٣٢) . الخطوة n في طريقة جرام - شميت



الشكل (٣٢) . الخطوة الثانية في طريقة جرام - شميت

الخطوة الثالثة . المتجه

$$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$$

مختلف عن المتجه الصفري ، كما أن $v_3 \perp e_1$ و $v_3 \perp e_2$. نأخذ

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3.$$

الخطوة ٣ . المتجه (انظر الشكل ٣٣)

$$(13) \quad v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k$$

مغاير للمتجه الصفري ، وهو عمودي على e_1, \dots, e_{n-1} . ونجد منه المتجه

$$(14) \quad e_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n.$$

ان هذه هي الدساتير العامة لطريقة جرام - شميت ، التي صممها شميت عام ١٩٠٧ م . وأيضاً غرام عام ١٨٨٣ م . لاحظ بأن الحد المطروح في الطرف الايمن من (13) هو مسقط x_n على $\text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. وبعبارة أخرى ، فاننا في كل خطوة نطرح من x_n « مركباته » في اتجاهات المتجهات التي سبق وحولناها الى متجهات متعامدة ونظامية . وبذا نحصل على v_n ، الذي نضربه بعد ذلك بـ $1/\|v_n\|$ فنحصل على متجه نظيمه 1 . ان v_n لا يمكن أن يكون المتجه الصفري أيا كان n . فعلاً ، فإذا كان n أصغر دليل يكون من أجله $v_n = 0$ ، فان (13) تبين عندئذ أن x_n هو تركيب خطي لـ e_1, \dots, e_{n-1} ، وبالتالي تركيب خطي لـ x_1, \dots, x_{n-1} ، وهذا يناقض افتراضنا بأن $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً .

مسائل

١ - بين بأنه يوجد فضاء داخلي بعده n و يساوي n قاعدة $\{b_1, \dots, b_n\}$ متجهاتها متعامدة ومنظمة . (ستطرق الى حالة البعد غير المنتهي في البند ٦-٣) .

٢ - كيف يمكن تأويل (12*) هندسياً في \mathbb{R}^r ، حيث $r \geq n$ ؟

٣ - استخرج متباينة شقارتز الواردة في البند ٣-٢ انطلاقاً من (12*) .

٤ - أورد مثلاً على عنصر x في \mathbb{R}^2 بحيث نجد متباينة تامة في (12) .

٥ - اذا كانت (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، وكان x عنصراً في X ، فبين أن $x-y$ ، حيث y معطى بالمساواة

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad \alpha_k = \langle x, e_k \rangle$$

عمودي على الفضاء الجزئي $Y_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

٦ - (خاصة القيمة الصغرى لمعاملات فورييه) . لتكن $\{e_1, \dots, e_n\}$ مجموعة

متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، حيث n مثبت . ليكن x أي

عنصر مثبت في X و $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$. عندئذ يكون $\|x-y\|$ تابعا لـ

β_1, \dots, β_n . بين بالحساب المباشر أن الشرط اللازم والكافي كي يكون

$\|x-y\|$ أصغرياً هو أن يكون $\beta_j = \langle x, e_j \rangle$ حيث $j = 1, \dots, n$.

٧ - لتكن (e_k) أي متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X . بين

أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فإن

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

٨ - بين أنه لا يمكن أن يوجد لعنصر x في فضاء جداء داخلي X « عدد كبير »

من معاملات فورييه $\langle x, e_k \rangle$ « الكبيرة » . نفترض هنا أن (e_k) متتالية

متعامدة منظمة معطاة • وبصورة أدق ، بين أن العدد n_m للمقادير $\langle x, e_k \rangle$ التي تحقق الشرط $|\langle x, e_k \rangle| > 1/m$ يجب أن يحقق المتباينة $n_m < m^2 \|x\|^2$ •

٩ - حول الحدود الثلاثة الاولى من المتتالية (x_0, x_1, x_2, \dots) الى متجهات متعامدة منظمة ، بفرض أن $x_j(t) = t^j$ على الفترة $[-1, 1]$ ، حيث

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt.$$

١٠ - ليكن $x_1(t) = t^2$ و $x_2(t) = t$ و $x_3(t) = 1$ • حول x_1 و x_2 و x_3 الى متجهات متعامدة منظمة بهذا الترتيب على $[-1, 1]$ بالنسبة الى الجداء الداخلي في المسألة ٩ • قارن مع المسألة ٩ ، وقدم التعليق على ذلك •

٣-٥ المتسلسلات المرتبطة بالمتتاليات والمجموعات المتعامدة المنظمة

ثمة حقائق وتساؤلات ترد حول متباينة بسل • وفي هذا الفصل ، سنجد أولا مبررا لتبني مصطلح « معاملات فورييه » ، ومن ثم ندرس المتسلسلات غير المنتهية المرتبطة بالمتتاليات المتعامدة المنظمة ، وأخيرا نلقي نظرة أولى على المجموعات المتعامدة المنظمة غير العدودة •

٢-٥-١ مثال (متسلسلة فورييه)

المتسلسلة المثلثانية هي متسلسلة من النمط

$$(1^*) \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

ويقال عن دالة حقيقية x معرفة على \mathbb{R} انها دورية اذا وجد عدد موجب p (يدعى دور x) بحيث يكون $x(t+p) = x(t)$ أيا كان t من \mathbb{R} •

لتكن x دالة دورية دورها 2π ومستمرة • نعرف متسلسلة فورييه للدوال

x بأنها المتسلسلة الثلاثية (1*) التي معاملاتها a_k و b_k محددة بدساتير اولر التالية :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt \\ (2) \quad a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt dt \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt dt \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

وتسمى هذه المعاملات معاملات فورييه للدالة x .

إذا كانت متسلسلة فورييه للدالة x متقاربة أيًا كان t وكان مجموعها $x(t)$ ، فاننا نكتب عندئذ

$$(1) \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

وبما أن x دورية ودورها 2π ، فاننا يمكن أن نستعير في (2) عن فترة المكاملة $[0, 2\pi]$ بأي فترة أخرى طولها 2π ، وعلى سبيل المثال ، بالفترة $[-\pi, \pi]$.

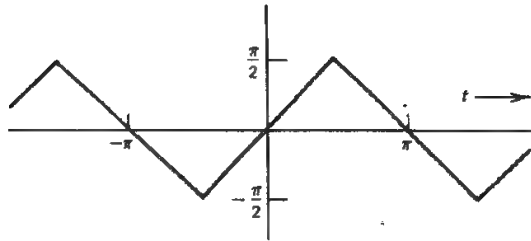
لقد برزت متسلسلة فورييه في أول الامر في سياق المسائل الفيزيائية التي عالجها برنوي (الاوتار المهتزة ، عام ١٧٥٣ م) ، وفورييه (التوصيل الحراري ، عام ١٨٢٢) . وتساعد هذه المتسلسلات في تمثيل الظواهر الدورية المعقدة بدلالة دوال دورية بسيطة (الجيب وجيب التمام) ، ولها تطبيقات فيزيائية متنوعة فيما يتعلق بالمعادلات التفاضلية (الاهتزازات ، التوصيل الحراري ، مسائل الكمون ، وغيرها) .

نرى لدى النظر الى (2) أن تعيين معاملات فورييه يتطلب اجراء عمليات مكاملة . وللاخذ بيد أولئك القراء الذين لم يسبق لهم أن رأوا متسلسلة فورييه من قبل ، فاننا نورد للإيضاح الدالة (انظر الى الشكل ٣٤) :

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{if } -\pi/2 \leq t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{if } \pi/2 \leq t < 3\pi/2 \end{cases}$$

حيث نفترض أيضا أن $x(t+2\pi) = x(t)$ • نستنتج من (2) أن $a_k = 0$ حيث $k = 0, 1, \dots$ وأنه إذا اخترنا $[-\pi/2, 3\pi/2]$ كفترة مناسبة للمكاملة ، فإننا نجد بالمكاملة بالتجزئة أن

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin kt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t) \sin kt \, dt \\ &= -\frac{1}{\pi k} [t \cos kt] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kt \, dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi k} [(\pi - t) \cos kt] \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \frac{1}{\pi k} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos kt \, dt \\ &= \frac{4}{\pi k^2} \sin \frac{k\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$



الشكل (٣٤) • بيان الدالة الدورية x ، التي دورها 2π ، والمعطاة بالمساواة
 $x(t) = t$ إذا كان $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ ، وبالمساواة $x(t) = \pi - t$ إذا كان $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$

لذا فإن (1) تأخذ الشكل

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t - \frac{1}{3^2} \sin 3t + \frac{1}{5^2} \sin 5t - \dots \right).$$

ويمكن للقارئ رسم بيان المجاميع الجزئية الثلاثة الاولى ومقارنتها ببيان الدالة x في الشكل ٣٤ .

وبالعودة الى متسلسلات فورييه العامة ، فمن الممكن السؤال عن ملاءمة هذه المتسلسلات للمصطلحات التي أوردناها في البند السابق . من الواضح أن دوال الجيب وجيب التمام في (1) هي حدود المتتاليتين (u_k) و (v_k) في ٣-٤-٥ ، أي أن

$$u_k(t) = \cos kt, \quad v_k(t) = \sin kt.$$

وبالتالي فمن الممكن كتابة (1) بالشكل

$$(3) \quad x(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(t) + b_k v_k(t)].$$

لتحرب (3) بعنصر مثبت u_j ، ومن ثم نكامل بالنسبة الى t من 0 الى 2π .
 أن هذا يعني أننا نأخذ الجداء الداخلي بـ u_j كما عرفناه في ٣-٤-٥ . سنفترض أنه يسمح بالمكاملة حدا حدا (ويكفي لهذا أن يكون التقارب منتظما) ، وسنفيد من تعامد (u_k) و (v_k) . ومن أن $u_j \perp v_k$ أيًا كان k و j . عندئذ نجد أن

$$\begin{aligned} \langle x, u_j \rangle &= a_0 \langle u_0, u_j \rangle + \sum [a_k \langle u_k, u_j \rangle + b_k \langle v_k, u_j \rangle] \\ &= a_j \langle u_j, u_j \rangle \\ &= a_j \|u_j\|^2 = \begin{cases} 2\pi a_0 & \text{if } j=0 \\ \pi a_j & \text{if } j=1, 2, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

(راجع (5) من البند ٣-٤) . وبصورة مماثلة ، فإذا ضربنا (3) بـ v_j وتابعنا كما في السابق ، فإننا نتوصل الى أن

$$\langle x, v_j \rangle = b_j \|v_j\|^2 = \pi b_j$$

حيث $j=1, 2, \dots$. فإذا حللنا بالنسبة الى a_j و b_j وأفدنا من المتتاليتين المتعامدتين المنظمتين (e_j) و (\bar{e}_j) ، حيث $e_j = \|u_j\|^{-1} u_j$ و $\bar{e}_j = \|v_j\|^{-1} v_j$ ،

فاننا نجد التالي :

$$(4) \quad \begin{aligned} a_j &= \frac{1}{\|u_j\|^2} \langle x, u_j \rangle = \frac{1}{\|u_j\|} \langle x, e_j \rangle, \\ b_j &= \frac{1}{\|v_j\|^2} \langle x, v_j \rangle = \frac{1}{\|v_j\|} \langle x, \bar{e}_j \rangle. \end{aligned}$$

إن هذا يتطابق مع (2) ، وهو يبين أنه لدينا في (3)

$$a_k u_k(t) = \frac{1}{\|u_k\|} \langle x, e_k \rangle u_k(t) = \langle x, e_k \rangle e_k(t)$$

ونجد دستورا مماثلا لـ $b_k v_k(t)$. وبالتالي فيمكننا كتابة متسلسلة فورييه (1) بالشكل

$$(5) \quad x = \langle x, e_0 \rangle e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle x, e_k \rangle e_k + \langle x, \bar{e}_k \rangle \bar{e}_k].$$

وهذا يرر تبني مصطلح « معاملات فورييه » الذي أوردناه في البند السابق .
وللانتهاء من هذا المثال ، فاننا نذكر بأنه يمكن للقارئ أن يجد مقدمة
لتسلسلات فورييه في كل من الكتب التالية :

Rogosinski, W. (1959), *Fourier Series*. 2nd ed. New York: Chelsea

Churchill, R. V. (1963), *Fourier Series and Boundary Value Problems*.
2nd ed. New York: McGraw-Hill

Kreyszig, E. (1972), *Advanced Engineering Mathematics*. 3rd ed.
New York: Wiley

ان مثالنا يتعلق بالتسلسلات غير المنتهية وي طرح السؤال عن كيفية تعميم
ما ورد فيه على متتاليات متعامدة منظمة أخرى ، وعما يمكننا قوله حول تقارب
التسلسلات المقابلة .

إذا أعطينا أي متتالية متعامدة منظمة (e_k) في فضاء هلبرت H ، فيمكن

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ أعداد اختيارية • وبناء على التعريف الوارد في البند ٢-٣ ،
فإن مثل هذه المتسلسلة تكون متقاربة ويكون مجموعها s إذا وجد s من H بحيث
تكون المتتالية (s_n) التي حدودها المجاميع الجزئية

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

متقاربة من s ، أي إذا كان $\|s_n - s\| \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ •

٢-٥-٣ مبرهنة (التقارب)

لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • عندئذ نجد
ما يلي :

(أ) الشرط اللازم والكافي كي تكون المتسلسلة (6) متقاربة (بالنسبة للنظيم
على H) هو أن تتقارب المتسلسلة التالية :

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

(ب) إذا كانت (6) متقاربة ، فإن المعاملات α_k هي معاملات فورييه
 $\langle x, e_k \rangle$ ، حيث ترمز x إلى مجموع (6) ، لذا ففي هذه الحالة يمكن كتابة
(6) بالشكل

$$(8) \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

(ج) أيا كان x من H ، فإن المتسلسلة (6) ، حيث $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ ،
تكون متقاربة (بالنسبة للنظيم المعروف على H) •

البرهان :

(١) لتكن

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \quad \text{و} \quad \sigma_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

عندئذ يترتب على كون (e_k) متعامدة منظمة أنه إذا كان m أي عدد طبيعي يحقق الشرط $n > m$ فإن

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n\|^2 \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m. \end{aligned}$$

لذا فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون (s_n) متتالية لكوشي في H هو أن تكون (σ_n) متتالية لكوشي في \mathbb{R} • وبما أن \mathbb{R} تام ، فإننا نستنتج صحة الدعوى الاولى في البرهنة •

(ب) إذا أخذنا الجداء الداخلي لـ s_n و e_j ، وأفدنا من كون (e_k) متعامدة منظمة ، فإننا نجد أن

$\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j$ عندما يكون $j = 1, \dots, k$ ، حيث k مثبت ويحقق المتباينة $k \leq n$ ولما كان $s_n \rightarrow x$ فرضا ، وكان الجداء الداخلي مستمرا (راجع التمهيدية ٢-٢-٣) فإن

$$\alpha_j = \langle s_n, e_j \rangle \longrightarrow \langle x, e_j \rangle \quad (j \leq k).$$

يمكننا هنا أن نأخذ k (الذي يحقق الشرط $k \leq n$) كبيرا بقدر ما نبغى لان $n \rightarrow \infty$ ، لذا فإننا نجد أن $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ عندما $j = 1, 2, \dots$ •

(ج) يترتب على متباينة بسل في البرهنة ٣-٤-٦ أن المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

متقاربة • نستنتج من هذا ومن (١) أن (ج) يجب أن تكون صحيحة • ■

إذا كانت جماعة متعامدة منظمة (e_κ) ، $\kappa \in I$ ، في فضاء جداء داخلي غير
عدودة (نظرا لكون مجموعة الأدلة I غير عدودة) ، فانه لا يزال بإمكاننا تشكيل
معاملات فورييه $\langle x, e_\kappa \rangle$ لعنصر x من X ، حيث $\kappa \in I$ ، فإذا أفدنا الآن من
(12*) الواردة في البند ٣-٤ ، فانا نستنتج أنه أيا كان العدد المثبت $m=1,2,\dots$
فإن عدد معاملات فورييه التي تحقق الشرط $|\langle x, e_\kappa \rangle| > 1/m$ يجب أن يكون
منتهيا . وهذا يثبت صحة التمهيدية الشهيرة التالية :

٣-٥-٢ تمهيدية (معاملات فورييه)

يمكن أن يكون لكل x في فضاء جداء داخلي X مجموعة عدودة على الأكثر
من معاملات فورييه غير الصفرية $\langle x, e_\kappa \rangle$ بالنسبة لجماعة متعامدة منظمة
 (e_κ) ، $\kappa \in I$ ، في X .

لذا يمكن أن نقرن بكل عنصر مثبت x من H متسلسلة مماثلة لـ (8) هي

$$(9) \quad \sum_{\kappa \in I} \langle x, e_\kappa \rangle e_\kappa$$

كما يمكن ترتيب المتجهات e_κ المحققة للشرط $\langle x, e_\kappa \rangle \neq 0$ في متتالية (e_1, e_2, \dots)
بحيث تأخذ (9) الشكل (8) . ويرتب التقارب على المبرهنة ٣-٥-٢ .
وسنبين أن المجموع لا يتعلق بالترتيب الذي تتبعه في إدراج تلك العناصر e_κ في
متتالية .

البرهان :

لتكن (w_m) متتالية ناتجة عن تغيير ترتيب حدود المتتالية (e_n) . أن هذا
يعني تعريفا وجود تطبيق متباين وغامر $n \mapsto m(n)$ لـ \mathbb{N} على \mathbb{N} نفسها ، بحيث
تكون الحدود المتقابلة في المتالتين متساوية ، أي بحيث يكون $w_{m(n)} = e_n$.
لنضع

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle,$$

$$\beta_m = \langle x, w_m \rangle$$

وكذلك

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad x_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m w_m.$$

عندئذ نجد اعتمادا على الشق (ب) من المبرهنة ٣-٥-٢ أن

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle = \langle x_1, e_n \rangle, \quad \beta_m = \langle x, w_m \rangle = \langle x_2, w_m \rangle.$$

ولما كان $e_n = w_{m(n)}$ ، فاننا نجد أن

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, e_n \rangle &= \langle x_1, e_n \rangle - \langle x_2, w_{m(n)} \rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \langle x, w_{m(n)} \rangle = 0 \end{aligned}$$

كما نجد بصورة مماثلة أن $\langle x_1 - x_2, w_m \rangle = 0$. يقتضي هذا أن

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= \langle x_1 - x_2, \sum \alpha_n e_n - \sum \beta_m w_m \rangle \\ &= \sum \alpha_n \langle x_1 - x_2, e_n \rangle - \sum \beta_m \langle x_1 - x_2, w_m \rangle = 0. \end{aligned}$$

لذا فإن $x_1 - x_2 = 0$ ، أي أن $x_1 = x_2$. ولما كان تغيير الترتيب لحدود المتتالية (e_n) الذي أوصلنا الى المتتالية (w_m) كيفيا ، فاننا نكون بذلك قد أكملنا البرهان . ■

مسائل

١ - اذا كانت (6) متقاربة ومجموعها x ، فأثبت أن مجموع (7) هو $\|x\|^2$.

٢ - استنبط من (1) و (2) تمثيلا لدالة ε (دالة ل τ) دورها p اختياري بتسلسلة فورييه .

٣ - بين بمثال أن ليس من الضروري بأن يكون لتسلسلة متقاربة $\sum (x_k, e_k) e_k$ المجموع x .

٤ - إذا كانت (x_j) متتالية في فضاء جداء داخلي X بحيث تكون المتسلسلة
 $\|x_1\| + \|x_2\| + \dots$ متقاربة ، فبين أن (s_n) متتالية كوشي ، حيث
 $s_n = x_1 + \dots + x_n$

٥ - بين أن تقارب $\sum \|x_j\|$ في فضاء هلبرت H يقتضي تقارب $\sum x_j$

٦ - لتكن (e_j) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • بين بأنه إذا كان

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j, \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j,$$

فان

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \bar{\beta}_j$$

حيث المتسلسلات الاخيرة متقاربة بالاطلاق •

٧ - لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • يبين أنه إذا
كان x أي عنصر من H ، فان المتجه

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

يكون موجودا في H ، كما يكون $x - y$ عموديا على كل e_k •

٨ - لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H ، وليكن
 $M = \text{span}(e_k)$ • بين أنه إذا كان $x \in H$ فان الشرط اللازم والكافي كي
يكون $x \in \bar{M}$ هو أن يكون بالامكان تمثيل x بالمتسلسلة (6) حيث
المعاملات $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ •

٩ - لتكن (e_n) و (\bar{e}_n) متتاليتين متعامدتين منظمين في فضاء هلبرت H ،
وليكن $M_1 = \text{span}(e_n)$ و $M_2 = \text{span}(\bar{e}_n)$ • بين بالافادة من المسألة ٨ أن
الشرط اللازم والكافي كي يكون $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$ هو أن يكون

$$(a) \quad e_n = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \bar{e}_m, \quad (b) \quad \bar{e}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{nm} e_m, \quad \alpha_{nm} = (e_n, \bar{e}_m).$$

١٠- قدم تفاصيل برهان التمهيدية ٣-٥-٣ .

٦-٣ المتتاليات والمجموعات المتعامدة المنظمة الكلية

ان المجموعات المتعامدة المنظمة الهامة فعلا في فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت هي تلك التي تحوي على عدد « كبير بقدر كاف » من العناصر ، بحيث يمكن أن يكون من الممكن تمثيل أي عنصر في الفضاء أو تقريبه بدقة كافية باستعمال هذه المجموعات المتعامدة المنظمة . ان الامر بسيط في الفضاءات منتهية البعد (التي بعدها n) ، اذ أن كل ما نحتاجه هو مجموعة متعامدة منظمة عدد عناصرها n . والسؤال الذي يطرح نفسه في هذا الصدد يدور حول ما يمكن فعله في حالة الفضاءات غير منتهية البعد أيضا . وسنورد فيما يلي بعض المفاهيم المتعلقة بهذا الموضوع .

١-٦-٣ تعريف (المجموعة المتعامدة المنظمة الكلية)

المجموعة الكلية (أو المجموعة الاساسية) في فضاء منظم X هي مجموعة جزئية M من X بحيث يكون $\text{span } M$ مجموعة كثيفة في X (راجع ١-٣-٥) . كذلك ، فان المجموعة (أو المتتالية أو الجماعة) المتعامدة المنظمة في فضاء جداء داخلي X والتي تكون كلية في X تدعى **مجموعة (أو متتالية أو جماعة) متعامدة منظمة كلية (*)** في X .

* وتدعى أحيانا مجموعة متعامدة منظمة **تامة** ، بيد أننا سنقتصر على استعمال مصطلح « التمام » بالمعنى الوارد في التعريف ١-٤-٣ ، وهذا أمر نستسيغه خشية استعمال كلمة واحدة لمفهومين مختلفين تماما . [وفضلا عن ذلك . فان بعض المؤلفين يعنون « بتمام » مجموعة متعامدة منظمة M الخاصة التي عبرنا عنها بالاقتضاء (I) الوارد في البرهنة ٢-٦-٣ . الا أننا لن نبنى هذا المصطلح كذلك] .

يتضح من التعريف مباشرة أن الشرط اللازم والكافي كي تكون M كلية هو أن يكون

$$\text{span } M = X.$$

وتدعى الجماعة المتعامدة المنظمة في X أحيانا قاعدة متعامدة منظمة لـ X .
 بيد أنه من الأهمية بمكان ملاحظة أن هذه ليست قاعدة بالمعنى الوارد في الجبر
 للفضاء X باعتباره فضاء متجهيا ، إلا إذا كان X منتهي البعد .

يوجد في كل فضاء لهلبرت $H \neq \{0\}$ مجموعة متعامدة منظمة كلية .

إن هذا أمر بَيِّنٌ في حال كون H منتهي البعد . أما إذا كان H غير منتهي
 البعد وفصولا (راجع ١-٣-٥) ، فإن هذا يترتب على طريقة جرام - شميت
 بالاستقراء (العادي) . وإذا كان H غير فصول ، فمن الممكن إيراد برهان انطلاقا
 من تهديدية زورن ، الأمر الذي سنفعله في البند ١-٤ حيث نقدم ونشرح التهديدية
 لغرض آخر .

لكل المجموعات المتعامدة المنظمة في فضاء معطى لهلبرت $H \neq \{0\}$ عدد
 كاردينالي (أصلي) واحد . يسمى هذا العدد بعد هلبرت أو البعد العمودي المنظم
 لـ H . (وفي حالة كون $H = \{0\}$ ، فإننا نعرف هذا البعد بأنه مساو للصفر) .
 إن هذه الدعوى واضحة في حال كون H منتهي البعد ، ذلك أن بعد هلبرت
 عندئذ هو البعد بالمعنى الجبري . أما في حالة فضاء H فصول وغير منتهي البعد ،
 فإن هذه الدعوى تنتج رأسا من المبرهنة ٣-٦-٤ . وفي حالة فضاء عام H ،
 يتطلب البرهان أدوات أكثر تقدما من نظرية المجموعات . راجع الصفحة ٢٤٦ من
 الكتاب التالي :

Hewitt, E., and K. Stromberg (1969), *Real and Abstract Analysis*.
 Berlin: Springer

تبين المبرهنة التالية أن المجموعة المتعامدة المنظمة لا يمكن أن تظل متعامدة
 منظمة بإضافة عناصر جديدة إليها .

٢-٦-٣ مبرهنة (الكلية)

إذا كانت M مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي X فاننا نجد ما يلي :

(أ) إذا كانت M كلية في X ، فلا وجود لمتجه غير صفري x في X ، بحيث يكون x عموديا على كل عنصر من M ، وباختصار فان

$$(1) \quad x \perp M \implies x = 0.$$

(ب) إذا كان X تاما ، فان الشرط هو أيضا كاف كي تكون M كلية في X .

البرهان :

(أ) ليكن H اتمام X (راجع ٣-٢-٣) . عندئذ يكون X ، باعتباره فضاء جزئيا من H ، كثيفا في H . ان M مجموعة كلية في X فرضا ، لذا فان $\text{span } M$ كثيفة في X ، وبالتالي فهي كثيفة في H . وعندئذ تقتضي التمهيدية ٣-٣-٧ أن المتسم المعامل لـ M في H هو $\{0\}$. ومن باب أولى ، فانه اذا كان x عنصرا من X وكان $x \perp M$ ، فان $x = 0$.

(ب) اذا كان X فضاء هلبرت وكانت M محققة لذلك الشرط ، الامر الذي يترتب عليه أن $M^\perp = \{0\}$ ، فان التمهيدية ٣-٣-٧ تقتضي أن تكون M كلية في X . ان تمام X في (ب) شرط ضروري . فاذا لم يكن X تاما ، فقد لا توجد أية مجموعة متعامدة منظمة M في X بحيث تكون M كلية في X . وقد أورد ديكسميه J. Dixmier عام ١٩٥٣ م . مثالا على ذلك . راجع كذلك الصفحة ١٥٥ من كتاب بورباكي لعام ١٩٥٥ (الوارد في قائمة المراجع) .

ثمة معيار هام آخر للكلية نجده انطلاقا من متباينة بسل (راجع ٣-٤-٦) . لهذا نأخذ أي مجموعة متعامدة منظمة M في فضاء هلبرت H . من المعلوم استنادا الى التمهيدية ٣-٥-٣ أنه يوجد لكل عنصر x مثبت في H جملة عدودة على الاكثر من معاملات فورييه غير الصفريّة ، لذا فمن الممكن ترتيب هذه المعاملات في متتالية ولتكن $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$ ان متباينة بسل هي (٣-٤-٦)

$$(2) \quad \sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{متباينة بسل})$$

حيث الطرف الايسر يمثل متسلسلة غير منتهية أو مجموعا منتهيا • وإذا أخذنا اشارة التساوي ، فانها تغدو بالشكل

$$(3) \quad \sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (\text{علاقة بارسفال})$$

ونجد عندئذ معيارا آخر للكلية هو :

٢-٦-٢ مبرهنة (الكليلة)

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة متعامدة منظمة M في فضاء هلبرت H كلية في H هو أن تتحقق علاقة بارسفال (3) أيأ كان x من H (يتم الجمع وفق جميع معاملات فورييه غير الصفرية لـ x بالنسبة إلى M) •

البرهان :

(أ) اذا لم تكن M كلية ، فانه يترتب على المبرهنة ٢-٦-٣ وجود عنصر غير صفري x في H بحيث يكون $x \perp M$ • وبما أن $x \perp M$ ، فاننا نجد في (3) أن $\langle x, e_k \rangle = 0$ أيأ كان k ، وبالتالي فان الطرف الايسر من (3) يساوي الصفر ، في حين أن $\|x\|^2 \neq 0$ ، وهذا يبين أن (3) غير صحيحة • لذا فانه اذا صحت (3) أيأ كان x في H ، وجب أن تكون M كلية في H •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن M كلية في H • لنأخذ أي عنصر x من H ومعاملات فورييه غير الصفرية لهذا العنصر (راجع ٣-٥-٣) التي نرتبها وفق متتالية $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$ ، أو نكتبها بترتيب معين اذا كان عددها منتهيا • لنعرف الآن y بالمساواة

$$(4) \quad y = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

مع ملاحظة أنه في حالة كون الطرف الايمن متسلسلة غير منتهية ، فان تقاربها ينتج

من المبرهنة ٣-٣ • لنبين أن $x-y \perp M$ • نرى انه اذا أفدنا من كون e_i متتالية متعامدة منظمة ، فانه يقابل كل e_i في (4) ما يلي :

$$\langle x-y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0.$$

ونجد لكل عنصر v من M غير محتوي في (4) المساواة $\langle x, v \rangle = 0$ ، وبالتالي فان

$$\langle x-y, v \rangle = \langle x, v \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, v \rangle = 0 - 0 = 0.$$

لذا فان $x-y \perp M$ ، أي أن $x-y \in M^\perp$ • وبما أن M كلية في H ، فاننا نجد استنادا الى ٣-٣-٧ أن $M^\perp = \{0\}$ • نستخلص مما تقدم أن $x-y=0$ ، أي أن $x=y$ • واعتمادا على (4) وعلى خاصة كون e_i متعامدة منظمة ، فاننا نستنتج (3) من

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle}.$$

وبذا يكتمل البرهان • ■

لنتقل الى فضاءات هلبرت الفصول • يوجد لكل من هذه الفضاءات وفق التعريف ٣-١-٥ مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في الفضاء • ان فضاءات هلبرت الفصول أبسط من الفضاءات غير الفصول ، ذلك أنها لا يمكن أن تحوي مجموعات متعامدة منظمة غير عدودة ، كما تبين المبرهنة التالية :

٣-٦-١ مبرهنة (فضاءات هلبرت الفصول)

ليكن H فضاء هلبرت • عندئذ نجد أنه

(أ) اذا كان H فصولا ، فان كل مجموعة متعامدة منظمة في H عدودة •

(ب) اذا حوى H متتالية متعامدة منظمة وكلية في H فان H فصول •

البرهان :

(أ) ليكن H فصولا ، و B أي مجموعة كثيفة في H و M أي مجموعة متعامدة منظمة . عندئذ تكون المسافة بين أي عنصرين مختلفين x و y في M مساوية $\sqrt{2}$ ذلك أن

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = 2.$$

لذا فالجواران الكرويان N_x لـ x و N_y لـ y اللذان نصف قطر كل منهما $\sqrt{2}/3$ منفصلان . ولما كانت B كثيفة في H ، فيوجد عنصر $b \in B$ في N_x وعنصر $\bar{b} \in B$ في N_y بحيث $b \neq \bar{b}$ نظرا لكون $N_x \cap N_y = \emptyset$. وبالتالي ، فإذا كانت M غير عدودة ، فالتا نجد جملة غير عدودة من الجوارات الكروية المنفصلة متنى (حيث يقابل كل x من M أحد هذه الجوارات) ، وعندها تكون B غير عدودة . وبما أن B هي أي مجموعة كثيفة ، فإن هذا يعني أن H لن يحوي مجموعة كثيفة غير عدودة ، وهذا يناقض كون H فصولا . يترتب على هذا أن M لابد أن تكون عدودة .

(ب) لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة كليه في H ، ولتكن A مجموعة كل التراكيب الخطية

$$\gamma_1^{(n)} e_1 + \dots + \gamma_n^{(n)} e_n \quad n = 1, 2, \dots$$

حيث $\gamma_k^{(n)} = a_k^{(n)} + i b_k^{(n)}$ ، بفرض $a_k^{(n)}$ و $b_k^{(n)}$ أعدادا عادية و $b_k^{(n)} = 0$ إذا كان H حقيقيا . من الواضح أن A عدودة . سنثبت أن A كثيفة في H وذلك بأن نبين أنه يوجد لكل x من H ولكل عدد موجب ε عنصر v في A يحقق المتباينة $\|x-v\| < \varepsilon$.

بما أن المتتالية (e_k) كليه في H ، فانه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث تحوي المجموعة $Y_n = \text{span} \{e_1, \dots, e_n\}$ نقطة بعدها عن x أصغر من $\varepsilon/2$. وبوجه خاص ، فإذا كان y هو المسقط العمودي لـ x على Y_n والذي يعطى بالمساواة (راجع (8) من البند ٣-٤)

$$y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

فان $\|x - y\| < \varepsilon/2$ • لذا فانتا نجد أن

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

وبما أن مجموعة الاعداد العادية كثيفة على \mathbb{R} ، فانه يوجد لكل $\langle x, e_k \rangle$ عدد $\gamma_k^{(n)}$ (قسماء الحقيقي والتخيلي عاديان) بحيث يكون

$$\left\| \sum_{k=1}^n [\langle x, e_k \rangle - \gamma_k^{(n)}] e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

لذا فان العنصر v من A المحدد بالمساواة

$$v = \sum_{k=1}^n \gamma_k^{(n)} e_k$$

بحقق ما يلي :

$$\begin{aligned} \|x - v\| &= \left\| x - \sum \gamma_k^{(n)} e_k \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum \langle x, e_k \rangle e_k \right\| + \left\| \sum \langle x, e_k \rangle e_k - \sum \gamma_k^{(n)} e_k \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

وهذا يثبت أن A كثيفة في H • وبما أن A عدودة ، فان H فصول • ■

لاستعمال فضاءات هلبرت في البحوث التطبيقية ، علينا أن نعرف المجموعة أو المجموعات المتعامدة المنظمة الكلية الواجب اختيارها في وضع محدد ، وأن نعرف كيفية تقصي خواص عناصر مثل هذه المجموعات • وفي حالة فضاءات دوال معينة ، فان هذه المسألة ستجري دراستها في البند اللاحق الذي يحوي دوال خاصة ذات أهمية تطبيقية سبق وأن درست بتفصيل كبير • وقبل الانتهاء من هذا البند ، سنبين أن لدراستنا الحالية نتائج أبعد ذات أهمية كبيرة، ويمكن صياغتها بدلالة ايزومورفيزمات فضاءات هلبرت • لهذا سنعيد الى الذاكرة أولا التعريف التالي الذي ورد في البند ٣-٢ :

الايزومورفيزم لفضاء هلبرت H على فضاء هلبرت \bar{H} ، حيث الفضاءان معرفان على حقل واحد ، هو مؤثر خطي متباين وغامر $T: H \rightarrow \bar{H}$ يحقق الشرط

$$(5) \quad \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

أيا كان x و y من H يدعى H و \bar{H} عندئذ فضاءين ايزومورفيين . وبما أن T خطي ، فانه يحفظ بنية الفضاء المتجهي ، وتبين المساواة (5) أن T تطبيق ايزومتري . يترتب على هذا وعلى كون T متباينا وغامرا أنه لا يمكن التمييز بين H و \bar{H} من وجهتي النظر الجبرية والمترية ، إذ إنهما في الحقيقة فضاء واحد ، اللهم باستثناء طبيعة عناصرهما ، وهذا يسمح لنا بالنظر الى \bar{H} على أنه في جوهره H الذي نضع اشارة فوق كل من متجهاته . أو أنه يمكننا أن نعد H ، \bar{H} نسختين (أنموذجين) لفضاء مجرد واحد ، الامر الذي غالبا ما نفعله في حالة الفضاءات الاقليدية التي بعدها n .

ان أكثر الحقائق اثارة في هذه المناقشة تكمن في أنه يوجد لكل بعد لهلبرت (راجع بداية هذا البند) فضاء مجرد واحد على الضبط لهلبرت وحقيقي ، وفضاء مجرد واحد على الضبط لهلبرت وعقدي . وبعبارة أخرى ، فانه يمكن التمييز بين فضاءين مجردين لهلبرت على حقل واحد عن طريق بعد هلبرت لكل منهما فقط ، وهذا تعميم للتمييز بين الفضاءات الاقليدية ، وهذا ما تعنيه البرهنة التالية :

٦-٣-٥ مبرهنة (اليزومورفيزم وبعد هلبرت)

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاءا هلبرت H و \bar{H} الحقيقيان معا او العقديان معا ايزومورفيين ، هو ان يكون بعد هلبرت لـ H مساويا بعد هلبرت لـ \bar{H} .
البرهان :

(٦) اذا كان H ايزومورفيا مع \bar{H} وكان $T: H \rightarrow \bar{H}$ ايزومورفيما ، فان (5) تبين أن للعناصر المتعامدة المنظمة في H صوراً متعامدة ومنظمة وفق

T • وبما أن T متباين وغامر ، فإننا نستنتج أن صورة كل مجموعة متعامدة منظمة كلية في H وفق T هي مجموعة متعامدة منظمة كلية في \bar{H} • لذا فإن بعد هيلبرت للفضاء H يساوي بعد هيلبرت للفضاء \bar{H} •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن بعد هيلبرت للفضاء H يساوي بعد هيلبرت للفضاء \bar{H} • ان الحالة التي يكون فيها $H = \{0\}$ و $\bar{H} = \{0\}$ تافهة • لذلك سنفترض أن $H \neq \{0\}$ • عندئذ يكون $\bar{H} \neq \{0\}$ ، كما يكون لاي مجموعتين متعامدتين منظمتين كليتين M في H و \bar{M} في \bar{H} عدد كاردينالي واحد • لذا فمن الممكن تذييل هاتين المجموعتين باستعمال مجموعة أدلة واحدة $\{k\}$ ، وبالتالي فإننا نكتب $M = (e_k)$ و $\bar{M} = (\bar{e}_k)$ •

لاثبت أن H و \bar{H} ايزومورفيان ، سننشئ ايزومورفيزما ل H على \bar{H} •
فاذا كان $x \in H$ ، نجد أن

$$(6) \quad x = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

حيث الطرف الايمن مجموع منته أو متسلسلة غير منتهية (٣-٥-٣) ، وحيث $\sum_k \langle x, e_k \rangle^2 < \infty$ استنادا الى متباينة بسل • فاذا عرفنا

$$(7) \quad \bar{x} = Tx = \sum_k \langle x, e_k \rangle \bar{e}_k$$

فاننا نستنتج التقارب وفق ٢-٥-٣ ، وبالتالي فان $\bar{x} \in \bar{H}$ • ان المؤثر T خطي نظرا لكون الجداء الداخلي خطيا بالنسبة للعامل الاول • كذلك ، فان T ايزومتري ، ذلك أنه اذا استعملنا أولا (7) ومن ثم (6) فاننا نجد التالي :

$$\|\bar{x}\|^2 = \|Tx\|^2 = \sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

يترتب على هذا وعلى (9) و (10) في البند ١-٣ أن T تحفظ الجداء الداخلي • فضلا عن ذلك فان الايزومتريية تقتضي التباين ، ذلك أنه اذا كان $Tx = Ty$ فان

$$\|x-y\| = \|T(x-y)\| = \|Tx - Ty\| = 0,$$

وبالتالي فإن $x=y$ و T متباين وفق ٢-٦-١٠ .

سنبين أخيرا أن T غامر . إذا كان

$$\bar{x} = \sum_k \alpha_k \bar{e}_k$$

عنصرا في \bar{H} ، فانه يترتب على متباينة بسل أن $\sum |\alpha_k|^2 < \infty$ وبالتالي فإن

$$\sum \alpha_k e_k$$

مجموع منته أو متسلسلة تتقارب من عنصر x من H وفق ٣-٥-٢ ، كما يكون

$\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ استنادا الى المبرهنة نفسها . لذا فاننا نجد أن $\bar{x} = Tx$ وفق (7) .

ولما كان $\bar{x} \in \bar{H}$ اختياريا ، فان هذا يثبت أن T غامر .

مسائل

١ - إذا كانت F قاعدة متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، فهل يمكن

تمثيل كل x من X على شكل تركيب خطي من عناصر في F ؟ (يتألف

التركيب الخطي تعريفا من عدد منته من الحدود) .

٢ - أثبت أنه إذا كان البعد العمودي لفضاء هلبرت منتهيا ، فانه يساوي بعد H

باعتباره فضاء متجهيا ، وبالعكس ، فإذا كان الفضاء H منتهيا فبين أن

الفضاء السابق يكون كذلك .

٣ - ما هي المبرهنة من الهندسة الابتدائية التي نستنتج منها (3) في حالة

فضاء أقلندي بعده n ؟

٤ - استنتج من (3) الدستور التالي (الذي غالبا ما يطلق عليه اسم

علاقة بارسفال) :

$$\langle x, y \rangle = \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}.$$

٥ - بين أن الشرط اللازم والكافي كسي تكون الجماعة المتعامدة المنظمة
 $(e_\kappa), \kappa \in I$ في فضاء هلبرت H كلية هو أن تتحقق العلاقة الواردة في

المسألة ٤ أيًا كان x و y في H •

٦ - ليكن فضاء هلبرت H فصولا و M مجموعة جزئية كثيفة وعدودة في H •
 أثبت أن H تحوي متتالية متعامدة منظمة كلية يمكن الحصول عليها من
 M بطريقة جرام - شميت •

٧ - بين أنه إذا كان فضاء هلبرت H فصولا ، فمن الممكن اثبات وجود مجموعة
 متعامدة منظمة كلية في H دون اللجوء الى تمهيد زورن •

٨ - إذا كانت F أي متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H الفصول ،
 فأثبت وجود متتالية متعامدة منظمة كلية \tilde{F} تحوي F •

٩ - لتكن M مجموعة كلية في فضاء جداء داخلي X • فإذا كان $\langle v, x \rangle = \langle w, x \rangle$ أيًا
 كان x من M ، فأثبت أن $v = w$ •

١٠ - لتكن M مجموعة جزئية من فضاء هلبرت H ، وليكن $v, w \in H$ • لنفترض
 أن المساواة $\langle v, x \rangle = \langle w, x \rangle$ الصحيحة أيًا كان x من M تقتضي المساواة $v = w$ •
 بيِّن أنه إذا تحقق هذا أيًا كان v, w من H فإن M كلية في H •

٣-٧ حدوديات لاكير وهرميت ولوجاندر

لنظرية فضاءات هلبرت تطبيقات في مواضيع مختلفة ومتطورة في التحليل
 الرياضي • وسنناقش في البند الحالي بعض المتتاليات المتعامدة الكلية وبعض
 المتتاليات المتعامدة المنظمة الكلية ، والتي كثيرا ما يرد استعمالها في سياق
 بعض المسائل العملية (في ميكانيكا الكم مثلا ، كما سنرى في الفصل ١١) •
 وقد درست خواص هذه المتتاليات بتفصيل كبير ، ويمثل الكتاب التالي مرجعا
 جيدا في هذا الموضوع :

هذا البند اختياري ♦

٣-٧-١ حدوديات لوجاندر

ان فضاء الجداء الداخلي X المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[-1, 1]$ حيث الجداء الداخلي يعرف بالمساواة

$$(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt$$

يمكن اتمامه طبقا للمبرهنة ٣-٢-٣ • عندئذ نجد فضاء هلبرت الذي نرمز له بـ $L^2[-1, 1]$ • راجع أيضا المثال ٣-١-٥ •

ان هدفنا هو الحصول على متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2[-1, 1]$ مؤلفة من دوال يسهل التعامل معها • وتمثل الحدوديات دوال هذا النمط • سننطلق من دوال القوة x_0, x_1, x_2, \dots حيث

$$(1) \quad x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = t, \quad \dots, \quad x_i(t) = t^i, \quad \dots \quad t \in [-1, 1].$$

ان هذه المتتالية مستقلة خطيا (أورد البرهان ١) • وبتطبيق طريقة جرام - شميت (البند ٣-٤)، نجد متتالية متعامدة منظمة (e_n) • كل e_n هو حدودي، ذلك أننا نستعمل تركيبا خطيا للدوال x_i • ودرجة e_n هي n كما سنرى ان (e_n) كلية في $L^2[-1, 1]$ •

البرهان :

ان المجموعة $W = A(X)$ كثيفة في $L^2[-1, 1]$ اعتمادا على المبرهنة ٣-٢-٣ • لذا فانه يقابل كل عنصر مثبت x من $L^2[-1, 1]$ وكل عدد موجب ε دالة مستمرة y معرفة على $[-1, 1]$ بحيث أن

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ويقابل y هذه حدودي z بحيث تتحقق المتباينة

$$|y(t) - z(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

أيا كان ε من $[-1, 1]$. ان هذا ناتج من مبرهنة فير شتراس في التقريب التي سنثبتها في البند ٤-١١ ، ويترتب على هذا أن

$$\|y - z\|^2 = \int_{-1}^1 |y(t) - z(t)|^2 dt < 2 \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

وبالتالي فاننا نجد اعتمادا على متباينة المثلث أن

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \varepsilon.$$

ويبين تعريف طريقة جرام - شميت أن (1) يقتضي وجود عنصر

$z \in \text{span}\{e_0, \dots, e_m\}$ عندما يكون m كبيرا بقدر كاف . ولما كان العنصر

$x \in L^2[-1, 1]$ والعدد الموجب ε كفيين ، فاننا نستنتج كلية (٢) .

هذا ويحتاج المرء لاغراض عملية دساتير ظاهرة . لذا ندعي بأن

$$(2a) \quad e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t) \quad n = 0, 1, \dots$$

حيث

$$(2b) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n].$$

يدعى P_n حدودي لوجاندر من المرتبة n ، ويسمى الدستور (2b) دستور روداريك . ومن نتائج الجذر التربيعي في الدستور (2a) الحصول على

الخاصة $P_n(1) = 1$ التي لن نتوقف عند اثباتها نظرا لعدم حاجتنا اليها .

إذا طبقنا مبرهنة ثنائي الحد على $(t^2 - 1)^n$ واشتققنا النتيجة n من المرات

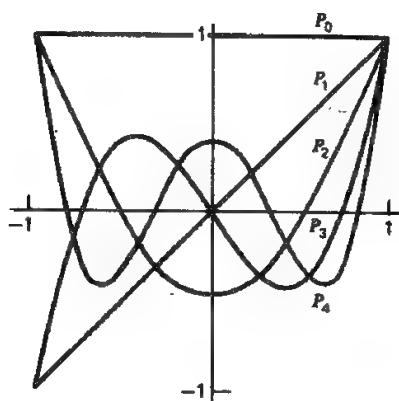
حدا حدا ، فاننا نجد من (2b) أن

$$(2c) \quad P_n(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{2^n j! (n-j)! (n-2j)!} t^{n-2j}$$

حيث $N = n/2$ اذا كان n زوجيا و $N = (n-1)/2$ اذا كان n فرديا • لذا فان
(راجع الشكل ٣٥)

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 & P_1(t) &= t \\ (2^*) \quad P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) & P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) & P_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t) \end{aligned}$$

وهلم جربوا •



الشكل (٣٥) • حدوديات لوجاندر

برهان (2a) و (2b) • سنبين في (٦) أن (2b) تقتضي

$$(3) \quad \|P_n\| = \left[\int_{-1}^1 P_n^2(t) dt \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

وبالتالي فان تنظيم e_n في (2a) يغدو 1 • أما في الشق (ب) فسنثبت أن (P_n) متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[-1, 1]$ • وهذا يكفي لاثبات (2a) و (2b) للسبب التالي : س نرمز للطرف الايمن من (2a) أولا بـ $y_n(t)$ • عندئذ يكون y_n حدوديا درجته n ، ويقتضي الشقان (٦) و (ب) أن (y_n) متتالية متعامدة منظمة في $L^2[-1, 1]$ • ليكن

$$Y_n = \text{span} \{e_0, \dots, e_n\} = \text{span} \{x_0, \dots, x_n\} = \text{span} \{y_0, \dots, y_n\};$$

ان اشارة المساواة الثانية هنا ناتجة من دستور طريقة جرام - شميت ، و اشارة المساواة الاخيرة ناتجة من $\dim Y_n = n+1$ والاستقلال الخطي لـ $\{y_0, \dots, y_n\}$ الذي نَصَصْنَا عليه في ٣-٢ . لذا فانه يوجد لـ y_n التمثيل

$$(4) \quad y_n = \sum_{j=0}^n \alpha_j e_j.$$

واستنادا الى التعامد ، فان

$$y_n \perp Y_{n-1} = \text{span} \{y_0, \dots, y_{n-1}\} = \text{span} \{e_0, \dots, e_{n-1}\}.$$

ان هذا يقتضي أنه اذا كانت $k=0, \dots, n-1$ فان

$$0 = \langle y_n, e_k \rangle = \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k.$$

وبالتالي فان (4) تقول الى المساواة $y_n = \alpha_n e_n$. ان $|\alpha_n| = 1$ هنا ، ذلك أن $\|y_n\| = \|e_n\| = 1$. وفعلا فان $\alpha_n = +1$ أو $\alpha_n = -1$ نظرا لان y_n و e_n حقيقيان كلاهما . ان $y_n(t) > 0$ عندما تأخذ t قيما كبيرة بقدر كاف ، ذلك أن معامل t^n في (2c) موجب . كذلك فان $e_n(t) > 0$ عندما تأخذ t قيما كبيرة بقدر كاف ، الامر الذي يمكن رؤيته من $x_n(t) = t^n$ ومن (13) و (14) في البند ٣-٤ . لذا فان $\alpha = +1$ و $y_n = e_n$ ، وهذا يثبت (2a) ، حيث P_n معطاة بـ (2b) .

يبين هذا كله أنه بعد ايراد هذه المقدمة ، فان البرهان سيكون كاملا .

(A) سنستنتج (3) من (2b) ؛ لذا نكتب $u = t^2 - 1$. ان الدالة u^n ومشتقاتها $(u^n)^{(n-1)}, \dots, (u^n)^{(0)}$ اصفار عندما $t = \pm 1$ ، كما أن $(u^n)^{(2n)} = (2n)!$. وباجراء المكاملة n مرة بالتجزئة ، فاننا نجد من (2b) أن

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \|P_n\|^2 &= \int_{-1}^1 (u^n)^{(n)} (u^n)^{(n)} dt \\ &= (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n+1)} dt \end{aligned}$$

= ...

$$= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 u^n dt$$

$$= 2(2n)! \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

$$= 2(2n)! \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \tau d\tau \quad (t = \sin \tau)$$

$$= \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}$$

• فإذا قسمنا الطرفين على $(2^n n!)^2$ ، فإننا نجد (3)

(ب) سنبين أن $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ ، حيث $0 \leq m < n$ • بما أن P_m حدودي ، فإنه يكفي إثبات $\langle x_m, P_n \rangle = 0$ عندما $m < n$ حيث x_m معين بـ (1) ، وهذا ينتج بأجراء المكاملة بالتجزئة m مرة كما يلي :

$$\begin{aligned} 2^n n! \langle x_m, P_n \rangle &= \int_{-1}^1 t^m (u^n)^{(n)} dt \\ &= t^m (u^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 t^{m-1} (u^n)^{(n-1)} dt \\ &= \dots \\ &= (-1)^m m! \int_{-1}^1 (u^n)^{(n-m)} dt \\ &= (-1)^m m! (u^n)^{(n-m-1)} \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

وبهذا يكتمل برهان (2a) و (2b) • ■

وتشكل حدوديات لوجاندر حولا لمعادلة لوجاندر التفاضلية الهامة التالية

$$(5) \quad (1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0,$$

ويسكن الحصول على (2c) أيضا بتطبيق طريقة متسلسلات القوى على (5)

وفضلا عن ذلك ، فإن (q_n) حيث

$$(6) \quad q_n = \frac{1}{\|p_n\|} p_n, \quad p_n(t) = P_n(s), \quad s = 1 + 2 \frac{t-b}{b-a}.$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة كلية في الفضاء $L^2[a, b]$ ، ونجد اثباتا لهذا إذا لاحظنا أن $a \leq t \leq b$ توافق $-1 \leq s \leq 1$ ، وأن التعمد يُحفظ وفق هذا التحويل الخطي $t \rightarrow s$.

وهكذا فإننا نجد متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2[a, b]$ أيًا كانت الفترة المتراصة $[a, b]$. لهذا فإن المبرهنة ٣-٦-٤ تقتضي التالي :

الفضاء الحقيقي $L^2[a, b]$ فصول

٢-٧-٢ حدوديات هرميت

هنالك فضاءات أخرى ذات أهمية عملية هي $L^2(-\infty, +\infty)$ و $L^2[a, +\infty)$ و $L^2(-\infty, b]$ ، وهي فضاءات لم تتطرق إليها في ٣-٧-١ . بما أن فترات المكاملة غير منتهية ، فإن القوى \dots, x_1, x_0 في ٣-٧-١ وحدها لن تساعدنا في شيء . إلا أننا لو ضربنا كلا منها بدالة بسيطة تتناقص بسرعة كافية ، فيمكننا أن نأمل في الحصول على تكاملات منتهية . والدوال الاسية بأس مناسب تمثل اختيارا مناسباً لهذه الدوال .

لنأخذ الفضاء الحقيقي $L^2(-\infty, +\infty)$ ، ولنعين الجداء الداخلي بالدستور

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(t)y(t) dt.$$

سنطبق طريقة جرام - شميت على متتالية الدوال المعرفة كما يلي :

$$w(t) = e^{-t^2/2}, \quad tw(t), \quad t^2 w(t), \dots$$

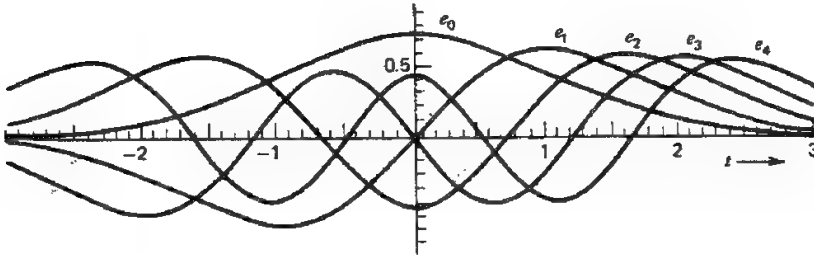
إن العامل $1/2$ الوارد في الأس اصطلاحى تماما ، وليس له معنى أعني .

هذه الدوال هي عناصر في $L^2(-\infty, +\infty)$ ، ذلك أنها محدودة على \mathbf{R} ، ولنفترض
مثلا أن $|t^n w(t)| \leq k_n$ أيًا كان t ، لذا فإن

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2/2} t^n e^{-t^2/2} dt \right| \leq k_{m+n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = k_{m+n} \sqrt{2\pi}.$$

ان طريقة جرام - شميت تعطي متالية متعامدة منظمة (e_n) حيث
(الشكل ٣٦)

$$(7a) \quad e_n(t) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t)$$



الشكل (٣٦) • الدوال e_n في (7a) الحاوية على حدوديات هرميت

وحيث

$$(7b) \quad H_0(t) = 1, \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) \quad n = 1, 2, \dots$$

يسمى H_n حدودي هرميت من المرتبة n •

وباجراء الاشتقاق التي أشرنا اليها في (7b) نجد أن

$$(7c) \quad H_n(t) = n! \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j 2^{n-2j}}{j! (n-2j)!} t^{n-2j}$$

حيث $N = n/2$ اذا كان n زوجيا و $N = (n-1)/2$ اذا كان n فرديا . لاحظ أ،
يمكن أيضا كتابة هذه المساواة بالشكل

$$(7c) \quad H_n(t) = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1) \cdots (n-2j+1)(2t)^{n-2j}.$$

ونورد فيما يلي الصيغ الظاهرة لحدوديات هرميت القليلة الاولى :

$$H_0(t) = 1$$

$$H_1(t) = 2t$$

$$(7*) \quad H_2(t) = 4t^2 - 2$$

$$H_3(t) = 8t^3 - 12t$$

$$H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12$$

$$H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t.$$

ان المتتالية (e_n) المعرفة بـ (7a) و (7b) متعامدة منظمة .

البرهان :

يبين (7a) و (7b) أنه علينا اثبات أن

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{if } m = n. \end{cases}$$

ونجد باشتقاق (7c) عندما $n \geq 1$ أن

$$\begin{aligned} H_n'(t) &= 2n \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j}{j!} (n-1)(n-2) \cdots (n-2j)(2t)^{n-1-2j} \\ &= 2n H_{n-1}(t) \end{aligned}$$

حيث $M = (n-2)/2$ اذا كان n زوجيا و $M = (n-1)/2$ اذا كان n فرديا . سنطبق
هذا الدستور على H_m ، ونفترض أن $m \leq n$ ، ونرمز للدالة الأسية في (8)
بـ v بقصد التبسيط ، ونجري المكاملة m مرة بالتجزئة . عندئذ نجد اعتمادا على
(7b) أن

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t) v^{(n)} dt \\
&= H_m(t) v^{(n-1)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2m H_{m-1}(t) v^{(n-1)} dt \\
&= -2m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(t) v^{(n-1)} dt \\
&= \dots \\
&= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) v^{(n-m)} dt.
\end{aligned}$$

وهنا $H_0(t) = 1$ • وإذا كان $m < n$ ، فإننا إذا أجرينا المكاملة مرة أخرى ، نجد 0 ، ذلك أن v ومشتقاتها تقترب من الصفر عندما $t \rightarrow +\infty$ أو عندما $t \rightarrow -\infty$. وهذا يثبت تعامد (e_n) • سنثبت صحة (8) عندما $m = n$ الامر الذي يترتب عليه أن $\|e_n\| = 1$ وفق (7a) • إذا كان $m = n$ ، ورمزنا للتكامل الاخير بـ J . فإننا نجد

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

وهذه نتيجة معروفة • وللتحقق منها ، نأخذ J^2 ونستخدم الاحداثين القطبيين r, θ . والمساواة $ds dt = r dr d\theta$ فنجد

$$\begin{aligned}
J^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s^2+t^2)} ds dt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

لذا فان الدستور (8) صحيح ، الامر الذي يقتضي كون (e_n) متعامدة منظمة •

وغالبا ما يعبر عن (8) بالعارة التقليدية القائلة بأن الحدوديات H_n تشكل متتالية متعامدة بالنسبة الى دالة الوزن w^2 ، حيث w دالة عرفناها في البداية .

يمكننا إثبات أن المتتالية (e_n) المعرفة بـ (7a) و (7b) كلية في الفضاء الحقيقي $L^2(-\infty, +\infty)$. لنا فان هذا الفضاء فصول (راجع ٣-٦) .

لنذكر أخيرا أن حدوديات هرميت H_n تحقق معادلة هرميت التفاضلية

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0. \quad (9)$$

تحذير : من سوء الحظ ألا تكون المصطلحات في الكتب المختلفة موحدة . وفي الحقيقة ، فإن الدوال He_n المعرفة كالتالي

$$He_0(t) = 1, \quad He_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2}) \quad n = 1, 2, \dots$$

تسمى أيضا « حدوديات هرميت » ، والأسوء من ذلك ، فانه يشار إليها أحيانا بـ H_n .

سنورد تطبيقا لحدوديات هرميت في ميكانيكا الكم في البند ١١-٣ .

٢-٧-٢ حدوديات لاكير

من الممكن الحصول على متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2(-\infty, b]$ أو في $L^2[a, +\infty)$ من متتالية من هذا النوع في $L^2[0, +\infty)$ بالتحويلين $t = b - s$ و $t = s + a$ على الترتيب .

لنأخذ $L^2[0, +\infty)$. اذا طبقنا طريقة جرام - شميت على المتتالية المعرفة كالتالي

$$e^{-t^2/2}, \quad te^{-t^2/2}, \quad t^2e^{-t^2/2}, \quad \dots$$

فاننا نجد متتالية متعامدة منظمة (e_n) . من الممكن اثبات أن (e_n) كلية في

$L^2[0, +\infty)$ وانها تعطى بالدستور (الشكل ٣٧)

(10a)

$$e_n(t) = e^{-t/2} L_n(t)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

حيث يعرف حدودي لأكبر من المرتبة n كما يلي

(10b)

$$L_0(t) = 1,$$

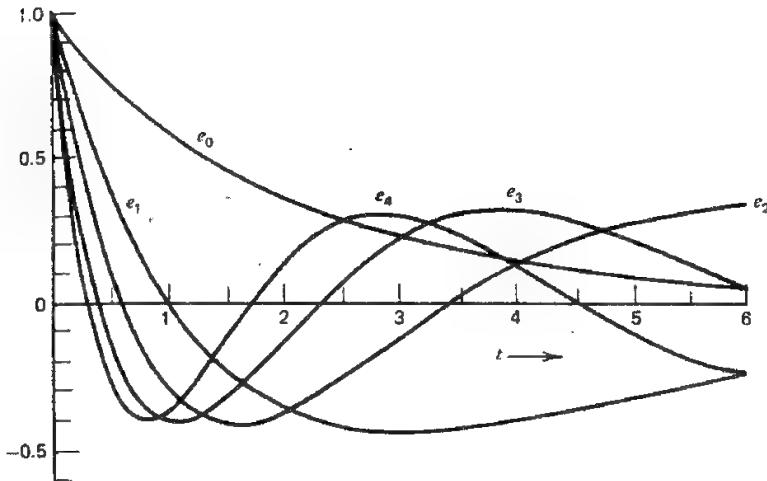
$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

أي أن

(10c)

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} t^j.$$



الشكل (٣٧) • السؤال e_n في (10a) الحاوية على حدوديات لأكبر

ونورد فيما يلي الصيغ الظاهرة لعدد قليل من حدوديات لأكبر الاولى

$$L_0(t) = 1$$

$$L_1(t) = 1 - t$$

(10*)

$$L_2(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2$$

$$L_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$$

$$L_4(t) = 1 - 4t + 3t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{24}t^4.$$

وتشكل حدوديات لاكير L_n حلولاً لمعادلة لاكير التفاضلية

$$(11) \quad tL_n'' + (1-t)L_n' + nL_n = 0.$$

ولمزيد من التفاصيل ، على القارئ أن يعود الى الكتاين التاليين الموجودين في مسرد المراجع :

Courant, R., and D. Hilbert (1953-62), *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. New York: Interscience/Wiley

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953-55), *Higher Transcendental Functions*. 3 vols. New York: McGraw-Hill

مسائل

١ - بين بأنه يمكن كتابة معادلة لوجاندر التفاضلية بالشكل

$$[(1-t^2)P_n']' = -n(n+1)P_n.$$

اضرب المعادلة بـ P_n • اضرب المعادلة الموافقة لـ P_n بـ $-P_n$ ، ثم اجمع المعادلتين • بين بمكاملة المعادلة الناتجة من -1 الى 1 أن (P_n) متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[-1, 1]$ •

٢ - استنتج (2c) من (2b) •

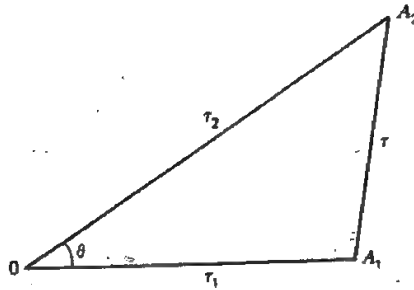
٣ - (الدالة المولدة) • بين بأن

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n.$$

تدعى الدالة في الطرف الايسر **الدالة المولدة** لحدوديات لوجاندر • ان الدوال المولدة مفيدة فيما يتعلق بدوال خاصة متنوعة • راجع الكتاين اللذين اوردناهما مباشرة قبل هذه المسائل •

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}} = \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

حيث r هي المسافة بين نقطتين A_1 و A_2 في R^3 كما هو مبين في الشكل ٣٨ و $r_2 > 0$. (ان هذا الدستور مفيد في نظرية الكمون) .



الشكل (٣٨) . المسألة ٤

٤ - أوجد حدوديات لوجاندر باستخدام طريقة متسلسلات القوى على النحو التالي : عوض $x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$ في معادلة لوجاندر ، وبين أنه بتعييننا للمعاملات ، فائنا نجد الحل $x = c_0 x_1 + c_1 x_2$ حيث

$$x_1(t) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} t^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} t^4 - \dots$$

وحيث

$$x_2 = t - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} t^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} t^5 - \dots$$

بين أنه اذا كان n عددا صحيحا موجبا ، فان احدى هاتين الدالتين تؤول الى حدودي ، وهذا الحدودي يندو P_n اذا اخترنا $c_n = (2n)!/2^n (n!)^2$ بمعامل t^n .

٦ - (الدالة المولدة) • بين بأن

$$\exp(2wt - w^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(t) w^n.$$

• تدعى الدالة في الطرف الايسر الدالة المولدة لحدوديات هرميت

٧ - بين باستعمال (7b) أن

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t).$$

٨ - بين باشتقاق الدالة المولدة في المسألة ٦ بالنسبة الى t أن

$$H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t) \quad (n \geq 1)$$

ثم بين باستعمال المسألة ٧ أن H_n يحقق معادلة هرميت التفاضلية •

٩ - حل المعادلة التفاضلية $y'' + (2n+1-t^2)y = 0$ بدلالة حدوديات هرميت •

١٠ - بين باستعمال المسألة ٨ أن

$$(e^{-t^2} H_n')' = -2ne^{-t^2} H_n.$$

بين بالافادة من هذا ومن الطريقة المشروحة في المسألة الاولى أن الدوال

المعرفة بـ (7a) متعامدة مع R •

١١ - (الدالة المولدة) • بين باستعمال (10c) أن

$$\psi(t, w) = \frac{1}{1-w} \exp\left[-\frac{tw}{1-w}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) w^n.$$

١٢ - بين باشتقاق ψ في المسألة ١١ بالنسبة الى w أن

$$(a) \quad (n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1-t)L_n(t) + nL_{n-1}(t) = 0.$$

ثم بين باشتقاق ψ بالنسبة الى t أن

(b)

$$L_{n-1}(t) = L'_{n-1}(t) - L'_n(t).$$

١٣- أثبت باستعمال المسألة ١٢ أن

(c)

$$tL'_n(t) = nL_n(t) - nL_{n-1}(t).$$

بين بالافادة من هذا ومن (b) في المسألة ١٢ أن L_n تحقق معادلة لاكير التفاضلية (11) .

١٤- بين أن لكل من الدوال الواردة في (10a) التنظيم 1 .

١٥- بين بأن الدوال في (10a) تشكل متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[0, +\infty)$.

٨-٣ تمثيل الداليات على فضاءات هيلبرت

ان معرفة الصيغة العامة للداليات الخطية المحدودة على فضاءات متنوعة أمر هام من الوجهة العملية ، وقد سبق أن أشرنا الى هذا الموضوع وشرحناه في البند ١٠-٢ . أما في فضاءات باناخ العامة ، فان الدساتير وطرق الحصول عليها تكون أحيانا معقدة . بيد أن الوضع يكون أسهل بدرجة كبيرة في فضاء هيلبرت ، كما تبين المبرهنة التالية :

٨-٣-١ مبرهنة ريس (الداليات على فضاءات هيلبرت)

يمكن تمثيل كل دالي خطي محدود f على فضاء هيلبرت H بدلالة الجداء الداخلي على النحو التالي

(1)

$$f(x) = (x, z)$$

حيث z تابع لـ f ، ويتعين بصورة وحيدة بـ f ونظيمه هو

(2)

$$\|z\| = \|f\|.$$

البرهان

سنثبت ما يلي :

(أ) للدالي f التمثيل (1)

(ب) z الوارد في (1) وحيد

(ج) الدستور (2) صحيح

أما التفاصيل فهي كما يلي :

(أ) إذا كان $f=0$ فإن (1) و (2) صحيحان إذا أخذنا $z=0$. لنفترض الآن أن $f \neq 0$. • لشرح فكرة البرهان ، سنطرح السؤال حول الخواص التي يجب أن يتمتع بها z إذا وجد التمثيل (1). • نلاحظ أولاً أن $z \neq 0$ ، لأنه إذا لم يتحقق ذلك لكان $f=0$. • ثانياً ، أن $\langle x, z \rangle = 0$ أيًا كان x التي تحقق الشرط $f(x)=0$ ، أي أيًا كان x من الفضاء الصفري $N(f)$ لـ f . لذا فإن $z \perp N(f)$. • ان هذا يوحى إلينا بأخذ $N(f)$ وتمسه المعامد $N(f)^\perp$.

ان $N(f)$ فضاء متجهي وفق ٢-٦-٩ وهو مغلق استناداً الى ٢-٧-١٠. • كذلك ، فإن كون $f \neq 0$ يقتضي أن يكون $N(f) \neq H$ ، وبالتالي فإنه يترتب على مبرهنة الاسقاط ٣-٣-٤ أن $N(f)^\perp \neq \{0\}$. • لذا فإن $N(f)^\perp$ يحوي عنصراً $z_0 \neq 0$. • سنضع

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x$$

حيث x عنصر اختياري من H • وبتطبيق f نجد

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0.$$

وهذا يبين أن $v \in N(f)$ • ولما كان $z_0 \perp N(f)$ ، فإن

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, z_0 \rangle &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle. \end{aligned}$$

وبملاحظة أن $\langle z_0, z_0 \rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$ ، فمن الممكن حل هذه المعادلة بالنسبة إلى $f(x)$ ونجد

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle} \langle x, z_0 \rangle.$$

يمكن كتابة هذا بالصيغة (1) ، حيث

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} z_0.$$

وبما أن x عنصر اختياري من H ، فالتنا نكون قد أثبتنا (1) .

(ب) سنثبت أن z الوارد في (1) وحيد . لنفترض أنه أيا كان x من H فإن

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle.$$

عندئذ يكون $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ أيا كان x . وإذا اخترنا العنصر الخاص $x = z_1 - z_2$ فإننا نجد أن

$$\langle x, z_1 - z_2 \rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

لذا فإن $z_1 - z_2 = 0$ ، أو $z_1 = z_2$ ، وبذا نكون قد أثبتنا الوحدة .

(ج) سنثبت أخيرا (2) . إذا كان $f = 0$ فإن $z = 0$ وتكون (2) صحيحة . لنفترض أن $f \neq 0$. عندئذ يكون $z \neq 0$. ويترتب على (1) بفرض $x = z$ وعلى (3) من البند ٢-٨ أن

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\| \|z\|.$$

وبالتقسيم على $\|z\| \neq 0$ نجد أن $\|z\| \leq \|f\|$. ونجد من (1) ومن متباينة

شفارتز (البند ٣-٢) أن

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\|.$$

وهذا يقتضي أن يكون

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|.$$

■

٢-٨-٢ تمهيدية (المساواة)

إذا كان $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$ أيا كان w في فضاء جداء داخلي X ، فإن $v_1 = v_2$ وبوجه خاص ، فإذا تحققت المساواة $\langle v_1, w \rangle = 0$ أيا كان w من X فإن $v_1 = 0$.

البرهان :

لدينا استنادا الى الفرض أنه أيا كان w فلن

$$\langle v_1 - v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle - \langle v_2, w \rangle = 0.$$

إذا وضعنا $w = v_1 - v_2$ ، أعطت هذه المساواة $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$. لذا فإن $v_1 - v_2 = 0$ أي أن $v_1 = v_2$. وبوجه خاص ، فإن المساواة $\langle v_1, w \rangle = 0$ تعطي بوضع $w = v_1$ المساواة $\|v_1\|^2 = 0$ ، أي أن $v_1 = 0$. ■

ان فائدة الداليات الخطية المحدودة على فضاءات هلبرت تنبع الى حد كبير من بساطة تمثيل ريس (1) . كذلك ، فإن (1) جد هام في نظرية المؤثرات على فضاءات هلبرت . ويتجلى هذا بخاصة في مؤثر هلبرت المرافق T^* لمؤثر خطي محدود T ، والذي سنعرفه في البند التالي . ولهذا الغرض فلا بد لنا من تأهيب لا يخلو من فائدة عامة بحد ذاته ، وسننتقل من التعريف التالي .

٢-٨-٣ تعريف (الصيغة الخطية مرة ونصف المرة)

ليكن X و Y فضاءين متجهين على حقل واحد K (يساوي \mathbb{R} أو \mathbb{C}) . عندئذ

تكون الصيغة الخطية مرة ونصف المرة (أو الدالي الخطي مرة ونصف المرة)
 h على $X \times Y$ هي دالة

$$h: X \times Y \longrightarrow K$$

بحيث تتحقق المساويات التالية أيا كانت x و x_1 و x_2 من X و y و y_1 و y_2 من Y وإيا كان العددا α و β :

- (a) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$
- (b) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$
- (3) (c) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$
- (d) $h(x, \beta y) = \beta h(x, y)$.

لذا فإن h خطي في مضمونه الاول وخطي مرافق (او قرين) في مضمونه الثاني .
 وإذا كان X و Y حقيقيين ($K = \mathbb{R}$) ، فإن (3d) تعدو ببساطة المساواة

$$h(x, \beta y) = \beta h(x, y)$$

وعندئذ يدعى h تطبيقا ثنائي الخطية نظرا لكونه خطيا في مضمونه .
 وإذا كان X و Y فضاءين منظمين ووجد عدد حقيقي c بحيث تتحقق
 المتباينة التالية أيا كان x و y

$$(4) \quad |h(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|,$$

فاننا نقول إن h محدود ، كما نسيي العدد

$$(5) \quad \|h\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\| \|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)|$$

نظم h •

وعلى سبيل المثال ، فإن الجداء الداخلي خطي مرة ونصف المرة ومحدود .
لاحظ أنه يترتب على (4) و (5) المتباينة

$$(6) \quad |h(x, y)| \leq \|h\| \|x\| \|y\|.$$

هذا وقد سبق وورد مصطلح « خطي مرة ونصف المرة » في البند ١-٣ .
كذلك فإن كلمتي « صيغة » و « دالي » الوارديتين في التعريف ٢-٨-٣ شائعتا
الاستعمال ، واستخدام الاولى أو الثانية أمر يعود بدرجة كبيرة الى الذوق
الشخصي . وقد يكون من المستحسن استعمال كلمة « صيغة » في حال المتغيرين .
والاحتفاظ بكلمة « دالي » لحالات المتغير الواحد . كما في المبرهنة ١-٨-٣ .
وهذا ما سنفعله .

من الاهمية بمكان معرفة أنه يسكن انطلاقاً من المبرهنة ١-٨-٣ الحصول
على تمثيل عام للصيغ الخطية مرة ونصف المرة على فضاءات هيلبرت على النحو
التالي .

٢-٨-٢ مبرهنة (تمثيل ريس)

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهيلبرت ، ولتكن

$$h: H_1 \times H_2 \longrightarrow K$$

صيغة محدودة وخطية مرة ونصف المرة . عندئذ يكون لـ h التمثيل

$$(7) \quad h(x, y) = (Sx, y)$$

يث $S: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثر خطي محدود . وينعين S هذا بصورة وحيدة بدلالة
 h . ونظيره يعطى بالمساواة

$$(8) \quad \|S\| = \|h\|.$$

البرهان :

لنأخذ $\overline{h(x, y)}$ • نلاحظ أن هذا خطي بالنسبة الى y بسبب اشارة اللصاقة — • ولجعل البرهنة ٢-٣-١ قابلة للتطبيق ، نقي x مثبتا • عندها تعطي هذه البرهنة تمثيلا يكون فيه y متغيرا • وليكن مثلا

$$\overline{h(z, y)} = \langle y, z \rangle.$$

وبالتالي فان

$$(9) \quad h(x, y) = \langle z, y \rangle.$$

ان z الذي ينتمي H_2 وحيد، ولكنه هو تابع بالطبع لعنصرنا x المثبت في H_1 •
يترتب على هذا أن المساواة (9) حيث المتغير هو x تحدد مؤثرا

$$\bullet \quad z = Sx \text{ معرفا بالدستور } S: H_1 \longrightarrow H_2$$

• وبتعويض $z = Sx$ في (9) ، فاننا نجد (7)

ان S خطي ، ذلك أن ساحته هي الفضاء المتجهي H_1 ، وأنا نستنتج من (7) ومن خاصية الخطية مرة ونصف المرة أن

$$\begin{aligned} \langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) \\ &= \alpha \langle Sx_1, y \rangle + \beta \langle Sx_2, y \rangle \\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y \rangle \end{aligned}$$

أيا كان y من H_2 ، وبالتالي فانه يترتب على التمهيدية ٢-٣-٢ أن

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2.$$

إن S محدود ، ذلك أنه اذا تجاوزنا الحالة التافهة $S=0$ ، فاننا نجد أن

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \geq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Sx \neq 0}} \frac{|\langle Sx, Sx \rangle|}{\|x\| \|Sx\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|^2}{\|x\|^2} = \|S\|^2.$$

وهذا يثبت محدودية S ، ويبين فضلا عن ذلك أن $\|h\| \geq \|S\|$.

وللحصول على المساواة (8) نلاحظ أن المتباينة $\|h\| \leq \|S\|$ تنتج من تطبيق متباينة شقارتز كما يلي :

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\| \|y\|}{\|x\| \|y\|} = \|S\|.$$

ان S وحيد ، ذلك أنه لو افترضنا وجود مؤثر خطي آخر $T: H_1 \rightarrow H_2$ يحقق الشرط

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle,$$

أيما كان x من H_1 وأيما كان y من H_2 ، لوجدنا أن $Sx = Tx$ استنادا الى التمهيدية ٢-٣ وذلك أيما كان x من H_1 . لذا فان $S = T$ تعريفا . ■

مسائل

١ - (الفضاء R^3) . بين أنه يمكن تمثيل أي دالي خطي f على R^3 بالجداء الداخلي :

$$f(x) = x \cdot z = \xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2 + \xi_3 \zeta_3.$$

٢ - (الفضاء I^2) . بين أنه يمكن تمثيل كل دالي خطي محدود f على I^2 بالشكل

$$f(x) = \sum_{j=1}^2 \xi_j \bar{\zeta}_j \quad [z = (\zeta_j) \in I^2].$$

٣ - اذا كان z أي عنصر مثبت من فضاء جداء داخلي X ، فين أن المساواة $f(x) = \langle x, z \rangle$ تحدد داليا خطيا محدودا f على X نظيمه هو $\|z\|$.

٤ - لتأخذ المسألة ٣ . فإذا كان التطبيق $X \rightarrow X'$ المعرف بـ $f: x \rightarrow f(x)$ غامرا .
فبين أن X يجب أن يكون فضاء هلبرت .

٥ - أثبت بأن الفضاء الثنوي للفضاء الحقيقي l^2 هو l^2 . (أفد من ٣-١) .

٦ - بين بأن المبرهنة ٣-١ تحدد تطبيقا ايزومتريا متباينا وغامرا $T: H \rightarrow H'$
معرفا بـ $f_z = \langle \cdot, z \rangle$. وهذا التطبيق ليس خطيا ولكنه خطي مرافق ،
أي أن $\alpha z + \beta v \mapsto \alpha f_z + \beta f_v$.

٧ - بين بأن الفضاء الثنوي لفضاء H' هلبرت H هو فضاء هلبرت المزود بالجداء
الداخلي (\cdot, \cdot) المعرف كما يلي :

$$(f_v, f_u)_1 = \overline{(z, v)} = (v, z),$$

وحيث $f_z(x) = \langle x, z \rangle$. وهلم جرا .

٨ - بين بأن كل فضاء H لهبرت ايزومورفي (راجع البند ٣-٦) مع فضاءه
الثنوي الثاني $H'' = (H')'$. (تدعى هذه الخاصة انعكاسية H . وستتطرق
إليها بزيد من التفصيل في الفضاءات المنظمة في البند ٤-٦) .

٩ - (العادم) . اشرح العلاقة بين M في المسألة ١٣ من البند ٢-١٠ وبين
 M في البند ٣-٣ في حالة مجسوعة جزئية غير خالية M في فضاء هلبرت
• H

١٠ - بين بأن الجداء الداخلي (\cdot, \cdot) على فضاء جداء داخلي X هو صيغة h خطية
مرة ونصف المرة ومحدودة . ما هي $\|h\|$ في هذه الحالة ؟

١١ - إذا كان X فضاء متجهيا وكانت صيغة خطية مرة ونصف المرة على
 $X \times X$. فبين أن المساواة $f_1(x) = h(x, y_0)$ ، حيث y_0 مثبت ، تعين داليا خطيا
على X . وكذلك الامر مع المساواة $f_2(y) = \overline{h(x_0, y)}$ ، حيث x_0 مثبت .

١٢ - ليكن X و Y فضاءين منظمين . بين بأن كل صيغة خطية مرة ونصف
المرة ومحدودة h على $X \times Y$ مستمرة بالنسبة لكلا المتغيرين .

١٣- (الصيغة الهرميتية) . ليكن X فضاء متجهيا على حقل K . تعرف الصيغة الهرميتية مرة ونصف المرة ، أو ببساطة ، الصيغة الهرميتية h على $X \times X$ بأنها تطبيق $h: X \times X \longrightarrow K$ بحيث تتحقق المساويات التالية أيا كانت العناصر x و y و z من X وأيما كان العدد α من K :

$$h(x+y, z) = h(x, z) + h(y, z)$$

$$h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$$

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}.$$

ما هو الشرط الاخير اذا كان $K = \mathbb{R}$ ؟ ما هو الشرط الواجب اضافته على h كي يغدو جداء داخليا على X ؟

١٤- (متباينة شفارتز) . ليكن X فضاء متجهيا و h صيغة هرميتية على $X \times X$. يقال عن هذه الصيغة انها نصف محددة موجبة اذا كان $h(x, x) \geq 0$ أيا كان x من X . بين بأنه عندئذ تتحقق متباينة شفارتز التالية

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y).$$

١٥- (نصف التنظيم) . اذا حققت h الشروط الواردة في المسألة ١٤ ، فيبين أن المساواة

$$p(x) = \sqrt{h(x, x)} \quad (\geq 0)$$

تحدد نصف تنظيم على X . (راجع المسألة ١٣ من البند ٢-٣) .

٩-٣ مؤثر هلبرت المرافق

تمكننا الآن النتائج المستخلصة من البند السابق بأن تقدم مؤثر هلبرت المرافق لمؤثر خطي محدود على فضاء هلبرت . وقد نبعت فكرة استحداث هذا

المؤثر من مسائل المصفوفات ومسائل المعادلات التفاضلية الخطية والمعادلات التكاملية الخطية . وسنرى أنه يساعدنا في تعريف ثلاثة أصناف مهمة من المؤثرات (تدعى المؤثرات المترافقة ذاتيا والمؤثرات الواحدية والمؤثرات الناقصية) . وقد درست هذه المؤثرات بصورة مستفيضة لكونها تشغل مركزا طليعا في العديد من البحوث التطبيقية المتنوعة .

١-٩-٣ تعريف (مؤثر هلبرت المرافق T^*)

ليكن $T: H_1 \rightarrow H_2$ مؤثرا خطيا مرافقا ، حيث H_1 و H_2 فضاءان لهلبرت . عندئذ يكون مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T هو المؤثر

$$T^*: H_2 \rightarrow H_1$$

بحيث (*) تتحقق المساواة

$$(1) \quad (Tx, y) = (x, T^*y).$$

أيما كان x من H_1 وأيما كان y من H_2 .

وبالطبع ، فعلينا أن نبين أولاً أنه يوجد لهذا التعريف معنى ، أي أنه يجب البرهان على أنه إذا كان المؤثر T معطى ، فإن T^* موجود فعلا .

٢-٩-٣ مبرهنة (الوجود)

ان مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T الوارد في التعريف ١-٩-٣ موجود ووحيد وهو مؤثر خطي محدود نظيمه يعطى بالمساواة

$$(2) \quad \|T^*\| = \|T\|.$$

* من الممكن الدلالة على الجداءات الداخلية على H_1 و H_2 بالرمز نفسه نظرا لان العوامل تبين الى أي من الفضاءات يعود الجداء الداخلي .

البرهان :

يعرف الدستور

$$(3) \quad h(y, x) = \langle y, Tx \rangle$$

صيغة خطية مرة ونصف المرة على $H_2 \times H_1$ ، ذلك أن الجداء الداخلي خطي مسرة ونصف المرة وأن T خطي . وفي الحقيقة ، فإن كون الصيغة خطية مرافقة تترى مما يلي :

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2) \rangle \\ &= \langle y, \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 \rangle \\ &= \alpha \langle y, Tx_1 \rangle + \beta \langle y, Tx_2 \rangle \\ &= \alpha h(y, x_1) + \beta h(y, x_2). \end{aligned}$$

إن h محدود ذلك أنه يترتب على متباينة شقارتز أن

$$|h(y, x)| = |\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|.$$

يترب على هذا أن $\|h\| \leq \|T\|$. ولما كان $\|h\| \geq \|T\|$ أيضا لان

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle y, Tx \rangle|}{\|y\| \|x\|} \geq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Tx \neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx \rangle|}{\|Tx\| \|x\|} = \|T\|.$$

فاننا نستنتج أن

$$(4) \quad \|h\| = \|T\|.$$

إن المبرهنة ٣-٤ تعطي تمثيل ريس لـ h . فاذا وضعنا فيها T^* عوضا عن S نجد أن

$$(5) \quad h(y, x) = \langle T^*y, x \rangle,$$

كذلك فان هذه المبرهنة تبين بأن $T^*: H_2 \longrightarrow H_1$ مؤثر خطي ومحدود يتعين

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|.$$

وهذا يثبت صحة (2) • وبمقارنة (3) و نجد أن $\langle y, Tx \rangle = \langle T^*y, x \rangle$ ، وبذا نجد (1) يأخذ المرافقات . وبالتالي فالتا نرى بأن T^* هو فعلا المؤثر المنشود .
لنرى دراستنا لخواص مؤثرات هلبيرت المرافقة ، نجد من الملائم الاستفادة من التمهيدية التالية :

٢-٩-٢ تمهيدية (المؤثر (كسفرى)

ليكن X و Y فضاءي جداء داخلي و $Q: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا .
عندئذ نجد ما يلي :

(أ) الشرط اللازم والكافي كي يكون $Q=0$ هو أن يكون $\langle Qx, y \rangle = 0$ أيا كان x من X وأيا كان y من Y .

(ب) إذا كان $Q: X \longrightarrow X$ ، حيث X عقدي ، وكان $\langle Qx, x \rangle = 0$ أيا كان x من X ، فإن $Q=0$.

البرهان :

(أ) أن المساواة $Q=0$ تعني أن $Qx=0$ أيا كان x : وهذا يقتضي التالي :

$$\langle Qx, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0 \langle w, y \rangle = 0.$$

وبالعكس ، فإن تحقق المساواة $\langle Qx, y \rangle = 0$ أيا كان x و y يقتضي المساواة $Qx=0$ أيا كان x وذلك استنادا الى ٢-٨-٣ • وبالتالي فإن $Q=0$ تعريفا .

(ب) لدينا بالفرض أن $\langle Qv, v \rangle = 0$ أيا كان $v = \alpha x + y \in X$ ، أي أن

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y \rangle \\ &= \alpha^2 \langle Qx, x \rangle + \alpha \langle Qy, x \rangle + \alpha \langle Qx, y \rangle + \langle Qy, y \rangle. \end{aligned}$$

ان الحدين الاولين في الطرف الايمن صفرين فرضا . فاذا كان $\alpha = 1$ وجدنا أن

$$\langle Qx, y \rangle + \langle Qy, x \rangle = 0.$$

واذا كان $\alpha = i$ ، فان $\bar{\alpha} = -i$ وعندئذ يكون

$$\langle Qx, y \rangle - \langle Qy, x \rangle = 0.$$

وبجمع المساويتين الاخيرتين نجد أن $\langle Qx, y \rangle = 0$ ، وعندئذ تنتج المساواة $Q=0$

من (أ) .

من الضروري أن يكون X عقديا في الشق (ب) من هذه التمهيدية ، ذلك أن هذه النتيجة قد لا تصح في حال كون X حقيقيا . وكمثال عكسي نورد الدوران Q للمستوى \mathbb{R}^2 بزاوية قائمة . ان Q خطي و $Qx \perp x$ ، لذا فان $\langle Qx, x \rangle = 0$ أيا كان x من \mathbb{R}^2 ، في حين أن $Q \neq 0$. (ما هي الحال عندما يكون مثل هذه الدوران في المستوي العقدي ؟)

يمكننا الآن ادراج بعض الخواص العامة لمؤثرات هلبرت المرافقة واقامة البرهان على صحة هذه الخواص التي سنستعملها مرارا وتكرارا لدى تطبيق هذه المؤثرات .

٢-٩-١ مبرهنة (خواص مؤثرات هلبرت المرافقة)

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت ، وليكن $S: H_1 \longrightarrow H_2$ و $T: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثرين خطيين محدودين ، وليكن α عددا ما . عندئذ نجد التالي :

- (a) $\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad (x \in H_1, y \in H_2)$
- (b) $(S+T)^* = S^* + T^*$
- (c) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- (6) (d) $(T^*)^* = T$
- (e) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$
- (f) $T^*T = 0 \iff T = 0$
- (g) $(ST)^* = T^*S^* \quad (\text{بفرض أن } H_2 = H_1)$

البرهان :

(أ) إن (1) تنتج من (6a) :

$$\langle T^*y, x \rangle = \overline{\langle x, T^*y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle.$$

(ب) نستنتج من (1) أيا كان x و y فإن

$$\begin{aligned} \langle x, (S+T)^*y \rangle &= \langle (S+T)x, y \rangle \\ &= \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle \\ &= \langle x, S^*y \rangle + \langle x, T^*y \rangle \\ &= \langle x, (S^*+T^*)y \rangle. \end{aligned}$$

لذا فإن $(S+T)^*y = (S^*+T^*)y$ أيا كان y استنادا الى ٣-٨-٢ ، وبذا نكون قد وجدنا (6b) •

(ج) يجب عدم الخلط بين الدستور (6c) والدستور $T^*(\alpha x) = \alpha T^*x$ ونجد (6c) بالحسابات التالية وبتطبيق الشق (أ) من التمهيدية ٣-٩-٣ على $Q = (\alpha T)^* - \bar{\alpha}T^*$ •

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T)^*y, x \rangle &= \langle y, (\alpha T)x \rangle \\ &= \langle y, \alpha(Tx) \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle y, Tx \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle T^*y, x \rangle \\ &= \langle \bar{\alpha}T^*y, x \rangle. \end{aligned}$$

(د) ان $(T^*)^*$ تكتب بالشكل T^{**} وتساوي T ، ذلك أنه أيا كان x من H_1 و y من H_2 ، فإنه يترتب على (6a) و (1) أن

$$\langle (T^*)^*x, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle$$

• وعندئذ نستنتج (6d) من الشق (أ) من التمهيدية ٣-٩-٣، حيث $Q = (T^*)^* - T$

(هـ) نرى أن $T^*T: H_1 \rightarrow H_1$ في حين أن $TT^*: H_2 \rightarrow H_2$ ونجد بناء على متباينة شقارتز أن

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2.$$

فاذا أخذنا الحد الاعلى \sup من أجل جميع العناصر x التي نظم كل منها 1 ، فاننا نجد أن $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ • وبالإفادة من (7) من البند ٢-٧ ومن (2) فاننا نجد أن

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

لذا فإن $\|T^*T\| = \|T\|^2$ • ونجد أيضا لدى الاستعاضة عن T بـ T^* واستعمال (2) ثانية أن

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2.$$

• أن $T^{**} = T$ هنا استنادا الى (6d) ، وبالتالي فانه يكتمل اثبات (6e) •

(و) إن (6f) تستنتج مباشرة من (6e) •

(ز) ان التطبيق المتكرر لـ (1) يعطي

$$\langle x, (ST)^*y \rangle = \langle (ST)x, y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \langle x, T^*S^*y \rangle.$$

لذا فان $(ST)^*y = T^*S^*y$ بناء على ٣-٢ ، وما المساواة هذه الا (6g) تعريفا • ■

مسائل

١ - أثبت أن $0^* = 0$ و $I^* = I$ •

٢ - ليكن H فضاء هلبرت و $T: H \rightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا متباينا وغامرا عكسه محدود • بين أن $(T^*)^{-1}$ موجود وأن

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

٣ - إذا كانت (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة على فضاءات هيلبرت

• $T_n \rightarrow T$ وكان H ، فبين أن $T_n^* \rightarrow T^*$

٤ - ليكن H_1 و H_2 فضاءي هيلبرت و $T: H_1 \rightarrow H_2$ مؤثرا خطيا محدودا . فإذا

كانت $M_1 \subset H_1$ و $M_2 \subset H_2$ مجموعتين جزئيتين بحيث أن $T(M_1) \subset M_2$ ،

• فأثبت أن $M_1^\perp \supset T^*(M_2^\perp)$

٥ - ليكن M_1 و M_2 في المسألة ٤ فضاءين جزئيين مغلقين . بين عندئذ أن الشرط

اللازم والكافي كي يكون $T(M_1) \subset M_2$ هو أن يكون $M_1^\perp \supset T^*(M_2^\perp)$

٦ - إذا كان $M_1 = N(T) = \{x | Tx = 0\}$ في المسألة ٤ ، فبين أن

$$(a) \quad T^*(H_2) \subset M_1^\perp, \quad (b) \quad [T(H_1)]^\perp \subset N(T^*), \quad (c) \quad M_1 = [T^*(H_2)]^\perp$$

٧ - ليكن T_1 و T_2 مؤثرين خطيين محدودين على فضاء هيلبرت العقدي H في

الفضاء نفسه . فإذا كان $\langle T_1 x, x \rangle = \langle T_2 x, x \rangle$ أيا كان x من H ، فأثبت أن

$$T_1 = T_2$$

٨ - ليكن $S = I + T^*T: H \rightarrow H$ ، حيث T خطي ومحدود . بين أن

$$S^{-1}: S(H) \rightarrow H \text{ موجود}$$

٩ - برهن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون للمؤثر الخطي المحدود

$T: H \rightarrow H$ على فضاء هيلبرت H مدى ذو بعد منته هو أن يكون بالامكان

تمثيل T بالشكل

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, v_j \rangle w_j \quad [v_j, w_j \in H]$$

١٠ - (مؤثر النقل الايمن) . لتكن (e_n) متتالية متعامدة منظمة في فضاء

هيلبرت الفصول H ، ولنعرف مؤثر النقل الايمن بأنه المؤثر الخطي

$T: H \rightarrow H$ بحيث أن $Te_n = e_{n+1}$ ، $n = 1, 2, \dots$. فسر مبرر التسمية

• أوجد المدى والفضاء الصفري والتنظيم ومؤثر هيلبرت المرافق للمؤثر T

٣-١٠ المؤثرات المترافقة ذاتيا والواحدية والناظرية

يمكن تحديد صفوف المؤثرات الخطية المحدودة ذات الاهمية العملية الكبيرة باستعمال مؤثر هلبيرت المرافق على النحو التالي :

٣-١٠-١ تعريف (المؤثرات المترافقة ذاتيا والواحدية والناظرية)

يقال عن مؤثر خطي محدود $T: H \rightarrow H$ على فضاء هلبيرت H إنه

مترافق ذاتيا (او قرين ذاتيا) او هرميتي اذا كان $T^* = T$

واحدي اذا كان T متباينا وغامرا وكان $T^* = T^{-1}$,

ناظمي اذا كان $TT^* = T^*T$.

ويعرف مؤثر هلبيرت المرافق T^* لـ T بالمساواة (1) من البند ٣-٩ ، أي بالمساواة

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

واذا كان T مترافقا ذاتيا ، فاننا نرى بأن الدستور يغدو بالشكل

$$(1) \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

اذا كان T مترافقا ذاتيا او كان واحديا ، فانه ناظمي

يمكن أن نرى ذلك رأسا من التعريف . وبالطبع ، فليس لزاما على المؤثر الناظمي أن يكون مترافقا ذاتيا أو واحديا . فمثلا ، اذا كان $I: H \rightarrow H$ المؤثر المطابق ، فان $T = 2iI$ ناظمي لان $T^* = -2iI$ (راجع ٣-٩-٤) ، وبالتالي فان $TT^* = T^*T = 4I$ ، في حين أن $T^* \neq T$ ، كما أن $T^* \neq T^{-1} = -\frac{1}{2}iI$.

وتنتج المؤثرات غير الناظرية ببساطة من المثال التالي . ونورد في المسألة ١٠ من البند ٣-٩ مؤثرا آخر T ، الامر الذي تترك اثباته للقارئ .

هذا ونستعمل المصطلحات الواردة في التعريف ٣-١٠-١ في صدد

المصفوفات كذلك . ونود شرح سبب هذا ونورد ذكر بعض العلاقات الهامة فيما يلي :

٢-١٠-٢ مثال (المصفوفات)

لنأخذ C^n حيث الجداء الداخلي معرف بالمساواة (راجع ١-٣-٤)

$$(2) \quad \langle x, y \rangle = x^T \bar{y},$$

نفرض أن x و y يكتبان على شكل متجهين عموديين ، وأن T تعني المنقول . لذا فإن $x^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ كما أننا نستعمل ضرب المصفوفات العادي .

ليكن $T: C^n \rightarrow C^n$ مؤثرا خطيا (وهو مؤثر محدود بناء على المبرهنة ٢-٧-٨) . فإذا أعطينا قاعدة لـ C^n ، فيمكن تمثيل T ومؤثر هلبرت المرافق له T^* بمصفوفتين مربعيتين $n \times n$ ، وليكونا مثلا A و B على الترتيب .

فإذا استعملنا (2) والقاعدة المعروفة $(Bx)^T = x^T B^T$ حول منقول الجداء ، نجد أن

$$\langle Tx, y \rangle = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y}$$

وأن

$$\langle x, T^*y \rangle = x^T \bar{B} \bar{y}.$$

نستنتج بناء على (1) من البند ٣-٩ أن الطرفين الايسرين متساويان أيا كان x و y من C^n . لذا فيجب أن يكون $A^T = \bar{B}$ ، وبالتالي يكون

$$B = \bar{A}^T.$$

وبذا نتوصل الى النتيجة التالية :

إذا أعطيت قاعدة لـ C^n ، وكان مؤثر خطي على C^n ممثلا بمصفوفة معينة ، فإن مؤثر هلبرت المرافق يمثل بالمرافق العقدي لمنقول المصفوفة .

وبالتالي ، فإن المصفوفة المثلثة

هرميتية إذا كان T مترافقا ذاتيا (هرميتيا)
واحدية إذا كان T واحديا
ناظمية إذا كان T ناظميا .

وبصورة مماثلة ، فإذا كان $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ مؤثرا خطيا ، فإن المصفوفة المثلثة

حقيقية متناظرة إذا كان T مترافقا ذاتيا
متعامدة إذا كان T واحديا .

ومن المفيد في هذا الصدد أن نعيد الى الذاكرة بعض التعاريف . نقول عن مصفوفة مربعة $A = (a_{jk})$ أنها :

هرميتية إذا كان $\bar{A}^T = A$ (اذن $\bar{a}_{kj} = a_{jk}$)
هرميتية تخالفية إذا كان $\bar{A}^T = -A$ (اذن $\bar{a}_{kj} = -a_{jk}$)
واحدية إذا كان $\bar{A}^T = A^{-1}$
ناظمية إذا كان $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$

ونقول عن مصفوفة حقيقية $A = (a_{jk})$ انها

(حقيقية) متناظرة إذا كان $A^T = A$ (اذن $a_{kj} = a_{jk}$)
(حقيقية) متناظرة تخالفية إذا كان $A^T = -A$ (اذن $a_{kj} = -a_{jk}$)
متعامدة إذا كان $A^T = A^{-1}$.

لذا فإن المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة (حقيقية) ، والمصفوفة الحقيقية الهرميتية التخالفية هي مصفوفة (حقيقية) متناظرة تخالفية ، والمصفوفة الحقيقية الواحدة هي مصفوفة متعامدة . (ينسب اسم المصفوفات الهرميتية الى الرياضي الفرنسي شارل هرميت ١٨٢٢ - ١٩٠١ م) ■

لنتقل الى المؤثرات الخطية على فضاء هيلبرت الكيفية لايراد معيار هام وبسيط للتوافق ذاتيا .

٣-١-٣ مبرهنة (الترافق ذاتيا)

ليكن $T: H \rightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا على فضاء هلبرت H ، عندئذ نجد ما يلي :

- (أ) اذا كان T مترافقا ذاتيا ، فان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي ايا كان x من H .
 (ب) اذا كان H عقديا وكان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقيا ايا كان x من H ، فان المؤثر T مترافق ذاتيا .

البرهان :

(أ) اذا كان T مترافقا ذاتيا ، فاننا نجد أن

$$\overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle.$$

ايا كان x . وبالتالي فان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي لكونه مساويا لمرافقه العقدي .

(ب) اذا كان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقيا ايا كان x فان

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \langle T^*x, x \rangle.$$

لذا فان

$$0 = \langle Tx, x \rangle - \langle T^*x, x \rangle = \langle (T - T^*)x, x \rangle$$

ويترتب على هاذ أن $T - T^* = 0$ بناء على الشق (ب) من التمهيدية ٣-٩-٣ وذلك لكون H عقديا . ■

من الضروري أن يكون الفضاء H عقديا في الشق (ب) من المبرهنة ، وهذا أمر يبين ذلك أنه اذا كان H حقيقيا ، فان الجداء الداخلي عدد حقيقي ، وعندئذ يكون $\langle Tx, x \rangle$ حقيقيا دون فرض أي شروط أخرى على المؤثر الخطي T .
 ان مركب مؤثرين مترافقين ذاتيا غالبا ما يرد في التطبيقات ، لذا فان المبرهنة التالية لاتخلو من فائدة في هذا الصدد .

٣-١٠-١ مبرهنة (الترافق ذاتيا لمركب مؤثرين)

الشرط اللازم والكافي كي يكون مركب مؤثرين خطيين مترافقين ذاتيا ومحدودين S و T على فضاء هلبرت H مترافقا ذاتيا هو أن يكون هذان المؤثران تبادليين (قابلين للمبادلة) ، أي أن يكون

$$ST = TS.$$

البرهان :

لدينا استنادا الى (6g) من البند السابق والى الفرض ما يلي

$$(ST)^* = T^*S^* = TS.$$

لذا فان

$$ST = (ST)^* \iff ST = TS.$$

وبذا يكتمل البرهان . ■

ان متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتيا ترد في مسائل متنوعة ، ونسوق في هذا الصدد المبرهنة التالية :

٣-١٠-٥ مبرهنة (متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتيا)

لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة والمترافقة ذاتيا $T_n: H \rightarrow H$ على فضاء هلبرت H . لنفترض أن (T_n) متقاربة من T ، أي أن $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ، حيث $\|\cdot\|$ هو التنظيم على الفضاء $B(H, H)$ (راجع البند ١٠-٢) . عندئذ تكون النهاية T مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا على H .

البرهان :

يجب اثبات أن $T^* = T$ ، وهذا ناتج من $\|T - T^*\| = 0$. ولايثبات المساواة الاخيرة ، نرى أنه بناء على ٣-٩-٤ و ٣-٩-٢ يكون

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$$

ثم نجد استنادا الى متباينة المثلث في $B(H, H)$ أن

$$\begin{aligned}\|T - T^*\| &\leq \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\| \\ &= \|T - T_n\| + 0 + \|T_n - T\| \\ &= 2\|T_n - T\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).\end{aligned}$$

لذا فإن $\|T - T^*\| = 0$ ، أي أن $T^* = T$.

ان هذه المبرهنات تمدنا بفكرة بسيطة عن الخواص الاساسية للمؤثرات الخطية المترافقة ذاتيا . وهي تقدم لنا العون كذلك في أبحاثنا المقبلة ، وبخاصة في النظرية الطيفية لهذه المؤثرات (الفصل التاسع) ، حيث سنسوق خواص أخرى .

سننتقل الآن الى المؤثرات الواحدية وتتعرف الى بعض من خواصها الرئيسية .

٣-١٠-٦ مبرهنة (المؤثر الواحدى)

ليكن $U: H \longrightarrow H$ و $V: H \longrightarrow H$ مؤثرين واحدتين ، حيث نفترض هنا H فضاء هيلبرت . عندئذ نجد التالي :

(أ) U ايزومتري (راجع ١-٦-١) ، وبالتالي يكون $\|Ux\| = \|x\|$ ايا كان x من H ،

(ب) $\|U\| = 1$ ، شريطة أن يكون $H \neq \{0\}$ ،

(ج) المؤثر U^{-1} (الذي يساوي U^*) واحدى ،

(د) UV واحدى ،

(هـ) U ناظمى .

وفضلا عن ذلك فإن

(و) الشرط اللازم والكافى كي يكون مؤثر خطى محدود T على فضاء هيلبرت العقدي H واحديا هو ان يكون T ايزومتريا وغامرا .

البرهان :

(أ) يمكن أن نرى هذا الشق من كون

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, Ix \rangle = \|x\|^2$$

(ب) هذا الشق ينتج مباشرة من (أ) .

(ج) لما كان U متباينا وغامرا ، فإن U^{-1} يكون كذلك ، وبالتالي نجد وفق ٣-٩-٤ أن

$$(U^{-1})^* = U^{**} = U = (U^{-1})^{-1}.$$

(د) ان UV متباين وغامر ، وعندها تعطى ٣-٩-٤ و ٢-٦-١١ ما يلي :

$$(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$$

(هـ) ان صحة هذا الشق تنتج من كون $U^{-1} = U^*$ ومن أن

$$* UU^{-1} = U^{-1}U = I$$

(و) لنفترض T ايزومتريا وغامرا . بما أن الايزومتريه تقتضي التباين ،

فان T متباين وغامر . سنبين أن $T^* = T^{-1}$. لدينا استنادا الى الايزومتريه ما يلي :

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \langle Ix, x \rangle.$$

وبالتالي فان

$$\langle (T^*T - I)x, x \rangle = 0$$

إذن $T^*T - I = 0$ وفق التمهيدية ٣-٩-٣ ، أي أن $T^*T = I$. ينتج من هذا أن

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT^{-1} = I.$$

يترتب على ما سبق أن $T^*T = TT^* = I$ ، وبالتالي يكون $T^* = T^{-1}$ ، الامر الذي

يعني أن T واحدي . أما العكس فواضح نظرا لكون T ايزومتريا بناء على (أ) وغامرا تعريفا . ■

لاحظ بأن المؤثر الايزومتري ليس واحدا بالضرورة ، ذلك أنه قد لا يكون

عامرا • وكمثال نورد مؤثر النقل الايمن $T: l^2 \rightarrow l^2$ المحدد بالدستور

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

حيث $x = (\xi_j) \in l^2$

مسائل

- ١ - اذا كان S و T مؤثرين محدودين ومترافقين ذاتيا على فضاء هلبرت H ، وكان α و β عددين حقيقيين ، فين أن $\bar{T} = \alpha S + \beta T$ مترافق ذاتيا •
- ٢ - كيف يمكن استعمال المبرهنة ٣-١٠-٣ في اثبات المبرهنة ٣-١٠-٥ في حالة فضاء هلبرت العقدي H ؟
- ٣ - بين أنه اذا كان $T: H \rightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا ، فان T^n يكون كذلك ، حيث n عدد صحيح موجب •
- ٤ - بين بأنه اذا كان T مؤثرا خطيا محدودا على H ، فان المؤثرين

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{و} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

مترافقان ذاتيا • بين أن

$$T = T_1 + iT_2, \quad T^* = T_1 - iT_2.$$

أثبت خاصة الوحدات ، أي أن $T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$ تقتضي $S_1 = T_1$ و $S_2 = T_2$ نفترض هنا أن S_1 و S_2 مترافقان ذاتيا •

- ٥ - ليكن $T: C^2 \rightarrow C^2$ مؤثرا معرفا بالمساواة $Tx = (\xi_1 + i\xi_2, \xi_1 - i\xi_2)$ ، حيث $x = (\xi_1, \xi_2)$ • (لتعريف C^2 راجع ٣-١-٤) • أوجد T^* • بين أن $T^*T = TT^* = 2I$ • أوجد T_1 و T_2 المعرفين في المسألة ٤ •

- ٦ - إذا كان $T: H \rightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا ، وكان $T \neq 0$ ،
فان $T^n \neq 0$. أثبت صحة هذا القول في كل من الحالتين التاليتين : (أ)
عندما يكون $n = 2, 4, 8, 16, \dots$ ، (ب) عندما يكون $n \in \mathbb{N}$.
- ٧ - بين بأن المتجهات العمودية في مصفوفة واحدة تشكل مجموعة متعامدة
منظمة بالنسبة للجداء الداخلي على C^n .
- ٨ - أثبت أن المؤثر الخطي الايزومتري $T: H \rightarrow H$ يحقق المساواة $T^*T = I$ ،
حيث I هو المؤثر المطابق على H .
- ٩ - بين بأن المؤثر الخطي الايزومتري وغير الواحدي $T: H \rightarrow H$ ينقل فضاء
هلبرت H على فضاء جزئي تماما من H .
- ١٠ - ليكن X فضاء جداء داخلي و $T: X \rightarrow X$ مؤثرا خطيا ايزومتريا . فاذا
كان $\dim X < \infty$ ، فبين أن T واحدي .
- ١١ - (التكافؤ الواحدي) . ليكن S و T مؤثرين خطيين على فضاء هلبرت H .
نقول عن المؤثر S أنه مكافئ واحديا للمؤثر T اذا وجد مؤثر واحدي U
على H بحيث يكون

$$S = UTU^{-1} = UTU^*.$$

فاذا كان T مترافقا ذاتيا ، فبين أن S مترافق ذاتيا .

- ١٢ - بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون T ناظميا هو أن يكون T_1 و T_2
الواردان في المسألة ٤ تبادليين . اشرح قسما من هذا بالاستعانة بمصفوفات
ناظمية ذات سطرين .

- ١٣ - اذا كانت $T_n: H \rightarrow H (n = 1, 2, \dots)$ مؤثرات خطية ناظمية ، وكان $T_n \rightarrow T$ ،
فبين بأن T مؤثر خطي ناظمي .

- ١٤ - اذا كان S و T مؤثرين خطيين ناظمين يحققان المساواة $ST^* = T^*S$ ، وكان
 $TS^* = S^*T$ ، فبين بأن مجموعهما $S+T$ وجداءهما ST ناظميان .

١٥ - بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي محدود $T: H \rightarrow H$

على فضاء هلبرت العقدي H ناظميا هو أن يكون $\|T^*x\| = \|Tx\|$ أيا كان x

من H • أثبت بالاستعانة بهذا أنه إذا كان T مؤثرا خطيا ناظميا فان

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

* * *

الفصل الرابع

مبرهنات أساسية حول الفضاءات المنتظمة وفضاءات باناخ

يمكننا القول بأن هذا الفصل يحوي أسس النظرية المتقدمة للفضاءات المنتظمة وفضاءات باناخ ، والتي لولاها لكنت الفائدة التي نجنها من هذه الفضاءات وتطبيقاتها جد محدودة . والمبرهنات الهامة الواردة في هذا الفصل هي نظرية هان - باناخ ، ونظرية المحدودية المنتظمة ، ونظرية التطبيق المفتوح ، ونظرية البيان المغلق . وتشكل هذه المبرهنات حجر الزاوية في نظرية فضاءات باناخ (علما بأن المبرهنة الاولى تسري على أي فضاء منظم) .

توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

١ - مبرهنة هان - باناخ ١-٢-٤ (وشكلها الآخران ١-٣-٤ و ٢-٣-٤) ، تدور حول تمديد الداليات الخطية على الفضاءات المتجهية . وهي تكفل كون الفضاء المنظم ذا مخزون وفير من الداليات الخطية ، بحيث اننا نجد نظرية ملائمة للفضاءات الثنوية ونظرية مرضية للتأثيرات المرافقة (البندان ٤-٥ و ٦-٤) .

٢ - مبرهنة المحدودية المنتظمة ٣-٧-٤ باناخ وشتاينهاوس . تعطينا

هذه المبرهنة الشروط الكافية كي تكون المتتالية $(\|T_n\|)$ محدودة ، حيث T_n مؤثرات خطية محدودة من فضاء باناخ في فضاء منظم . ولها تطبيقات متنوعة (بعضها بسيط وبعضها عميق) في التحليل ، وبخاصة فيما يتعلق بمتسلسلات فورييه (٤-٧-٥) ، والتقارب الضعيف (البندان ٤-٨ و ٤-٩) ، وجموعية المتتاليات (البند ٤-١٠) ، والمكاملة العددية (البند ٤-١١) ، وغيرها .

٣ - مبرهنة التطبيق المفتوح ٢-١٢-٤ . تنص هذه المبرهنة على أن كل

مؤثر خطي محدود T من فضاء باناخ على فضاء باناخ هو تطبيق مفتوح ، أي أن صور المجموعات المفتوحة وفق T هي مجموعات مفتوحة . لذا فإنه إذا كان T متباينا وغامرا ، كان T^{-1} مستمرا («مبرهنة العكس المحدود») .

٤ - مبرهنة البيان المطلق ٢-١٣-٤ . تعطي هذه المبرهنة الشروط التي

تجعل من مؤثر خطي مغلق (راجع ٤-١٣-١) محدودا . وتتمتع المؤثرات الخطية المغلقة بأهمية كبيرة في التطبيقات الفيزيائية وغيرها .

٤-١ تمهيدية زورن

سنحتاج الى تمهيدية زورن في اثبات مبرهنة هان - باناخ الاساسية ، والتي هي مبرهنة حول تحديد الداليات الخطية ، وهي هامة لاسباب سنأتي على ذكرها لدى صياغتنا للمبرهنة . ويوجد لتمهيدية زورن تطبيقات متنوعة ، سنعرض لاثنتين منها في موضع لاحق من هذا البند . ودعامة هذه التمهيدية مجموعة مرتبة جزئيا نعرفها فيما يلي :

٤-١-١ تعريف (المجموعة المرتبة جزئيا ، السلسلة)

المجموعة المرتبة جزئيا هي مجموعة M عرفنا عليها ترتيبا جزئيا ، وهو علاقة ثنائية نرمز لها بـ \leq وتحقق الشروط التالية :

- (تج ١) $a \leq a$ أيا كان a من M (خاصة الانمكاس)
- (تج ٢) إذا كان $a \leq b$ و $b \leq a$ ، فإن $a = b$ (خاصة التخالف)
- (تج ٣) إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ ، فإن $a \leq c$ (خاصة التعدي)

ان كلمة « جزئيا » تؤكد بأن M قد تحوي عنصرين a و b بحيث أنه لا تتحقق أي من العلاقتين $a \leq b$ و $b \leq a$ ، وفي هذه الحالة نقول عن a و b انهما عنصران غير متقارنين (أو غير قابلين للمقارنة) . وبالمقابل ، فاننا نقول عن عنصرين a و b انهما متقارنان (أو قابلان للمقارنة) إذا تحققت العلاقة $a \leq b$ أو العلاقة $b \leq a$ (أو كلاهما) .

المجموعة المرتبة كلياً (أو السلسلة) هي مجموعة مرتبة جزئياً كل عنصرين فيها قابلان للمقارنة . وبعبارة أخرى ، فان السلسلة هي مجموعة مرتبة جزئياً غير حاوية على عناصر غير قابلة للمقارنة .

العنصر الراجع لمجموعة جزئية W من مجموعة M مرتبة جزئياً هو عنصر u من M بحيث أن

$$x \leq u \text{ أيا كان } x \text{ من } W$$

(ان u تابع لـ M و W ، وهو قد يكون موجودا ، وقد لا يكون) . ويعرف **العنصر الاعظمي** لـ M بأنه عنصر m من M بحيث أن

$$m \leq x \text{ تقتضي } m = x$$

(ومرة أخرى نقول بأن M قد تحوي عناصر أعظمية ، وقد لا تحوي مثل هذه العناصر . لاحظ أيضا ان العنصر الاعظمي ليس بالضرورة عنصرا راجعا) .

أمثلة

٢-١-٤ اعداد الحقيقية .

لتكن M مجموعة كل الاعداد الحقيقية ، ولنفترض أن للعلاقة $x \leq y$ معناها المعتاد . ان M مرتبة كلياً ، ولا يوجد لها عنصر أعظمي .

٤-١-٣ مجموعة القوة

لتكن $\mathcal{P}(X)$ مجموعة قوة (أي مجموعة أجزاء) مجموعة معطاة X ، ولنفرض أن $A \subseteq B$ تعني $A \subset B$ ، أي أن A جزء من B • عندئذ تكون $\mathcal{P}(X)$ مرتبة جزئياً • ان العنصر الاعظمي الوحيد لـ $\mathcal{P}(X)$ هو X •

٤-١-٤ المرتبات n من الاعداد

لتكن M مجموعة كل المرتبات n $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ من الاعداد الحقيقية ، وليكن $x \leq y$ يعني أن $\xi_i \leq \eta_i$ أيا كان $i = 1, \dots, n$ حيث للمتبينة $\xi_i \leq \eta_i$ معناها المألوف • ان هذا يحدد ترتيباً جزئياً على M •

٤-١-٥ الاعداد الصحيحة

لتكن $M = \mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة • فاذا افترضنا أن $m \leq n$ تعني بأن m تقسم n ، فالتنا تكون قد عرفنا ترتيباً جزئياً على \mathbb{N} • هنالك أمثلة أخرى أوردناها في مجموعة المسائل • وباستعمال المفاهيم الواردة في ٤-١-١ ، فمن الممكن صياغة تمهيدية زورن التي نعتبرها موضوعاً (*) ، على النحو التالي :

٤-١-٦ تمهيدية زورن

لتكن M مجموعة غير خالية مرتبة جزئياً • فاذا افترضنا أن لكل سلسلة C في M عنصراً راجحاً ، فانه يوجد لـ M عنصر اعظمي واحد على الأقل •

تطبيقات

٤-١-٧ قاعدة هاميل

لكل فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ قاعدة هاميل • (راجع البند ٢-١) •

* تستعمل التسمية «تمهيدية» لاسباب تاريخية • ويمكن استنتاج تمهيدية زورن من موضوع الاختيار ، التي تنص على أنه يوجد لكل مجموعة معطاة E تطبيق c (هو «تطبيق الاختيار») معرف على $\mathcal{P}(E)$ وبأخذ قيمة في E ، بحيث أنه اذا كان $B \subseteq E$ و $B \neq \emptyset$ ، فإن $c(B) \in B$ • وبالعكس ، فان هذه الموضوعات تنتج من تمهيدية زورن ، وبالتالي فان تمهيدية زورن وموضوع الاختيار يمكن اعتبارهما موضوعتين متكافئتين •

البرهان :

لتكن M مجموعة كل المجموعات الجزئية المستقلة خطيا في X • بما أن $X \neq \{0\}$ ، فهناك عنصر $x \neq 0$ بحيث $\{x\} \in M$ ، وبالتالي فإن $M \neq \emptyset$ • ان علاقة الاحتواء تعرف ترتيبا جزئيا على M (راجع ١-٤-٣) ، ولكل سلسلة C محتواة في M عنصر راجح ، ألا وهو اجتماع كل المجموعات الجزئية في X التي هي عناصر من C • • اذا استندنا الى تمهيدية زورن ، فاننا نرى أنه يوجد لـ M عنصر أعظمي B ، وسنبين الآن أن B هو قاعدة هامل لـ X • ليكن $Y = \text{span } B$ ، عندئذ يكون Y فضاء جزئيا من X ، كما أن $Y = X$ لانه اذا لم يتحقق هذا لكانت $B \cup \{z\}$ ، $z \in X$ ، $z \notin Y$ جملة مستقلة خطيا تحوي تماما B كمجموعة جزئية ، وهذا يناقض كون B عنصرا أعظميا • ■

١-٤-٨ المجموعة المتعامدة المنظمة الكلية

توجد في كل فضاء لهبرت $H \neq \{0\}$ مجموعة متعامدة منظمة كلية (راجع البند ٣-٦) •

البرهان :

لتكن M مجموعة كل المجموعات الجزئية المتعامدة المنظمة في H • بما أن $H \neq \{0\}$ فانه يحوي عنصرا $x \neq 0$ ، كما تشكل $\{y\}$ مجموعة جزئية متعامدة منظمة في H ، حيث $y = \|x\|^{-1}x$ • لذا فإن $M \neq \emptyset$ • ان علاقة الاحتواء تعرف ترتيبا جزئيا على M • ولما كان لكل سلسلة C محتواة في M عنصر راجح ، الا وهو اجتماع كل المجموعات الجزئية في X التي هي عناصر من C ، فانه يترتب على تمهيدية زورن انه يوجد لـ M عنصر أعظمي F • وعندئذ نرى استنادا الى المبرهنة ٣-٦-٢ أنه يوجد عنصر غير صفري z في H بحيث أن $z \perp F$ • وبالتالي فان المجموعة $F_1 = F \cup \{e\}$ ، حيث $e = \|z\|^{-1}z$ متعامدة منظمة ، و F مجموعة جزئية محتواة تماما في F_1 ، وهذا يناقض كون F عنصرا أعظميا • ■

مسائل

١ - تحقق من صحة الدعاوى في المثال ١-٤-٣ •

٢ - لتكن X مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة x على الفترة $[0, 1]$ ،

ولنفترض أن $x \leq y$ تعني $x(t) \leq y(t)$ أيًا كان t من $[0, 1]$ • بين أن هذا يعرف ترتيبًا جزئيًا • هل هو ترتيب كلي ؟ وهل يوجد لـ X عناصر أعظمية ؟

٣ - بين بأن مجموعة كل الأعداد العقدية $z = x + iy$ و $w = u + iv$... يمكن

ترتيبها جزئيًا بافتراض أن $z \leq w$ تعني أن $x \leq u$ و $y \leq v$ ، حيث تعني الإشارة \leq المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية إشارة التباين المألوفة

على R •

٤ - أوجد العناصر الأعظمية في M بالنسبة للترتيب الجزئي في المثال ٤-١-٥ ،

حيث M هي :

(أ) $\{2, 3, 4, 8\}$ ، (ب) مجموعة كل الأعداد الأولية •

٥ - برهن بأنه يوجد للمجموعة A المرتبة جزئيًا والمنتية عنصر أعظمي واحد

على الأقل •

٦ - (العنصر الأصغر ، العنصر الأكبر) بين بأن كل مجموعة مرتبة جزئيًا M

يمكن أن يوجد فيها عنصر واحد على الأكثر a بحيث يكون $a \leq x$ أيًا كان

x من M ، وعنصر واحد على الأكثر b بحيث يكون $x \leq b$ أيًا كان x من

M • [إذا وجد العنصر a (أو b) ، فأننا نسميه عنصراً أصغر (أو

عنصراً أكبر ، على الترتيب) للمجموعة M] •

٧ - (العنصر القاصر) يعرف العنصر القاصر لمجموعة جزئية

غير خالية A من مجموعة مرتبة جزئيًا M ، بأنه عنصر x من M بحيث يكون

$x \leq y$ أيًا كان y من A • أوجد العناصر الراجعة والقاصرة

للمجموعة $A = \{4, 6\}$ في المثال ٤-١-٥ •

٨ - يعرف الحد الأدنى لمجموعة جزئية غير خالية A من مجموعة مرتبة جزئيًا M

بأنه عنصر قاصر x للمجموعة A بحيث يكون $l \leq x$ أيًا كان

العنصر القاصر l للمجموعة A ، وتكتب عادة $x = g.l.b. A = \inf A$ •

كذلك ، فأننا نعرف الحد الأعلى لـ A الذي نرمز إليه بـ $y = l.u.b. A = \sup A$

بأنه عنصر راجح $y \downarrow A$ بحيث يكون $y \leq u$ أيما كان العنصر
الراجح $u \downarrow A$ (أ) إذا وجد للمجموعة A حد أدنى ، فبين أنه
وحيد . (ب) حدد كلا من $\text{g.l.b. } \{A, B\}$ و $\text{l.u.b. } \{A, B\}$ في المثال
٣-١-٤ .

٩ - (الشبكية) . الشبكية هي مجموعة مرتبة جزئيا M بحيث يوجد لكل
عنصرين x و y فيها g.l.b. (نرسم له $x \wedge y$) و l.u.b. (نرسم له $x \vee y$)
بين بأن المجموعة المرتبة جزئيا في المثال ٣-١-٤ هي شبكية ،
حيث $A \vee B = A \cup B$ ، $A \wedge B = A \cap B$

١٠ - يعرف العنصر الاصغري لمجموعة مرتبة جزئيا M بأنه عنصر x من M بحيث
أن $y \leq x$ تقتضي أن يكون $y = x$. حدد كل العناصر الاصغرية في الشق
(أ) من المسألة ٤ .

٢-٤ مبرهنة هان - باناخ

ان مبرهنة هان - باناخ هي مبرهنة في تحديد الداليات الخطية . وسنرى
في البند القادم أن هذه المبرهنة تكفل وجود عدد وفير من الداليات الخطية المحدودة
على فضاء منظم ، بحيث أننا نجد نظرية مناسبة للفضاءات الثنوية التي تشكل
قسما أساسيا من النظرية العامة للفضاءات المنظمة . وفي هذا السياق تغدو
مبرهنة هان - باناخ واحدة من أهم المبرهنات المتعلقة بالمؤثرات الخطية المحدودة .
و فضلا عن ذلك ، فإن دراستنا ستبين بأن هذه النظرية تحدد المدى الذي يمكن
لقيم دالي خطي ادراكه . وقد تم اكتشاف هذه المبرهنة من قبل هـ هان
(١٩٢٧ م) ، ثم أعاد اكتشافها ، ولكن بصفتها العامة الحالية ، سـ باناخ
(١٩٢٩ م) ، ومن ثم عممها هـ بونبلاست وزوبشيك على الفضاءات المتجهية
العقدية (١٩٣٨ م) .

وبوجه عام ، ففي مسائل التمديد ، نأخذ شيئا رياضيا (تطبيقا مثلا) معرفا

على مجموعة جزئية Z من مجموعة معطاة X ، ومن ثم نمدد هذا الشيء من Z الى المجموعة X بأكملها بحيث تظل بعض الخواص الرئيسية للشيء سارية على الشيء الممدد .

والشيء الذي تعالج مبرهنة هان - باناخ مسألة تمديده هو دالي خطي f معرف على فضاء جزئي Z من فضاء متجهي X ، بفرض أن f يتمتع بخاصة المحدودية التي سنعرفها بدلالة الدالي الخطي جزئيا ، وهو دالي حقيقي p معرف على فضاء متجهي X بحيث يتحقق الشرط (الذي يسمى شرط الجمعية جزئيا) .

$$(1) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{أيا كان } x, y \in X$$

والشرط (الذي يسمى شرط التجانس ايجابا) .

$$(2) \quad p(ax) = ap(x) \quad \text{أيا كان } a \geq 0 \text{ في } \mathbb{R} \text{ وأيا كان } x \in X$$

(لاحظ بأن التنظيم على فضاء منظم هو دالي من هذا النوع) .

سنفترض أن قيم الدالي المعرف على Z الذي يطلب تمديده لا تتجاوز قيم دالي p معرف على X ، وسنحدد f من Z الى X دون أن يفقد صفة الخطية ودون أن يتجاوز قيم p ، وبالتالي سنمدد f الى دالي \bar{f} على X خطي وقيمه لا تتجاوز قيم p ، وهذا هو جوهر المبرهنة . سنفترض الآن أن X حقيقي، وسنعالج في البند التالي تعميما للمبرهنة حين نفترض X فضاء متجهيا عقديا .

٤-٢-١ مبرهنة هان - باناخ (تمديد الداليات الخطية)

ليكن X فضاء متجهيا حقيقيا و p داليا خطيا جزئيا على X . لنفترض كذلك أن f دالي خطي معرف على فضاء جزئي Z من X ويحقق الشرط

$$(3) \quad f(x) \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } Z$$

عندها يوجد f ممدد خطي \bar{f} من Z الى X يحقق الشرط

$$(3^*) \quad \bar{f}(x) \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X$$

أي أن \bar{f} هو دالي خطي على X يحقق (3*) على X ويحقق المساواة $\bar{f}(x) = f(x)$ أيا كان x من Z .

البرهان :

سنجيز البرهان وفق الخطوات التالية :

(أ) نأخذ المجموعة E المؤلفة من كل المنددات الخطية g للدالي f والمحقة للشرط $g(x) \leq p(x)$ على ساحتها $\mathcal{D}(g)$ ، وبين أن E يمكن ترتيبها جزئيا وأن تمهيدية زورن تكفل وجود عنصر أعظمي $\bar{f} \in E$.

(ب) ثبت أن \bar{f} معرف على الفضاء X بأكمله .

(ج) نتحقق من علاقة مساعدة استخدمناها في (ب) .

لنتقل الآن الى اثبات الشق الاول .

(أ) لتكن E مجموعة كل المنددات الخطية $g \in f$ المحقة للشرط

$$g(x) \leq p(x) \quad \mathcal{D}(g) \text{ من } x$$

من الواضح أن $E \neq \emptyset$ ، ذلك أن $f \in E$. يمكننا أن نعرف على E ترتيبا جزئيا حيث

$$g \leq h \quad \text{تعني أن} \quad h \text{ هو ممدد لـ } g$$

أي أن لدينا تعريفا $\mathcal{D}(h) \supset \mathcal{D}(g)$ و $h(x) = g(x)$ أيًا كان x من $\mathcal{D}(g)$.

لنعرف من أجل أي سلسلة C محتواة في E الدالي \hat{g} بالشكل

$$\hat{g}(x) = g(x) \quad \text{إذا كان } x \in \mathcal{D}(g) \quad (g \in C).$$

ان \hat{g} هو دالي خطي وساحته

$$\mathcal{D}(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} \mathcal{D}(g),$$

هي فضاء متجهي ، ذلك أن C سلسلة . ان تعريفنا \hat{g} خال من الغموض ، ذلك أنه إذا كان $x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2)$ ، حيث $g_1, g_2 \in C$ ، فإن $g_1(x) = g_2(x)$ نظرا لكون

C سلسلة ، وهذا يقتضي أن يكون $g_1 \leq g_2$ أو $g_2 \leq g_1$ • من الواضح أن $g \leq \bar{g}$ أيا كان g من C • لذا فإن \bar{g} عنصر راجح لـ C • ولما كان $C \subseteq E$ اختياريا ، فإن تهيدية زورن تقتضي أن يوجد لـ E عنصر أعظمي \bar{f} • واستنادا الى تعريف E ، فإن \bar{f} ممدد خطي لـ f يحقق الشرط

$$(4) \quad \bar{f}(x) \leq p(x) \quad x \in \mathcal{D}(\bar{f}).$$

(ب) سنبين الآن أن $\mathcal{D}(\bar{f})$ تساوي X بأكمله • لنفترض مؤقتا أن هذا غير صحيح • عندئذ يمكن أن نختار عنصرا y_1 من $X - \mathcal{D}(\bar{f})$ ونأخذ الفضاء الجزئي Y_1 من X المولد بـ $\mathcal{D}(\bar{f})$ و y_1 • لاحظ أن $y_1 \neq 0$ لأن $0 \in \mathcal{D}(\bar{f})$ • من الممكن كتابة أي عنصر x من Y_1 بالشكل

$$x = y + \alpha y_1 \quad y \in \mathcal{D}(\bar{f}).$$

ان هذا التمثيل وحيد ، ذلك أن المساواة $y + \alpha y_1 = \bar{y} + \beta y_1$ حيث $\bar{y} \in \mathcal{D}(\bar{f})$ تقتضي المساواة $y - \bar{y} = (\beta - \alpha)y_1$ ، حيث $y - \bar{y} \in \mathcal{D}(\bar{f})$ ، في حين أن $y_1 \notin \mathcal{D}(\bar{f})$ ، وبالتالي فإن الحل الوحيد هو $y - \bar{y} = 0$ ، وهذا يقتضي المساواة $\beta - \alpha = 0$ ، التي تعني الوحدةانية •

سنعرف الدالي g_1 على Y_1 بالمساواة

$$(5) \quad g_1(y + \alpha y_1) = \bar{f}(y) + \alpha c$$

حيث c أي عدد حقيقي ثابت • من السهل اثبات خطية g_1 • كذلك ، فإذا كان $\alpha = 0$ ، فانا نجد أن $g_1(y) = \bar{f}(y)$ • لذا فإن g_1 هو ممدد فعلي لـ \bar{f} بمعنى أنه ممدد بحيث تكون $\mathcal{D}(\bar{f})$ هي مجموعة جزئية تماما من $\mathcal{D}(g_1)$ • يترتب على هذا أنه اذا تمكنا من اثبات أن $g_1 \in E$ بالبرهان على أن

$$(6) \quad g_1(x) \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } \mathcal{D}(g_1)$$

فان هذا يناقض كون \bar{f} عنصرا أعظما ، وتكون الدعوى $X \neq \mathcal{D}(\bar{f})$ باطلة ، أي تكون الدعوى $X = \mathcal{D}(\bar{f})$ صحيحة •

(ج) وهكذا يجب علينا في الختام اثبات أن g_1 ، لدى اختيار مناسب لـ c في (5) يحقق (6) •

لنأخذ أي y و z في $\mathcal{D}(\bar{f})$ • نستنتج عندئذ من (4) و (1) أن

$$\begin{aligned}\bar{f}(y) - \bar{f}(z) &= \bar{f}(y - z) \leq p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \\ &\leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z).\end{aligned}$$

وننقل الحد الأخير الى اليسار والحد $\bar{f}(y)$ الى اليمين نجد أن

$$(7) \quad -p(-y_1 - z) - \bar{f}(z) \leq p(y + y_1) - \bar{f}(y),$$

حيث y_1 مثبت • وبما أن y لا يظهر في الطرف الايسر و z لا يظهر في الطرف الايمن ، فان اللامساواة تظل سارية اذا أخذنا الـ \sup عندما تمسح z المجموعة $\mathcal{D}(\bar{f})$ في الطرف الايسر (ولنطلق على العنصر الناتج m_0) ، واذا أخذنا الـ \inf عندما تمسح y المجموعة $\mathcal{D}(\bar{f})$ في الطرف الايمن ، ولنطلق على الناتج m_1 • وهكذا فان $m_0 \leq m_1$ ، واذا كان c يحقق الشرط $m_0 \leq c \leq m_1$ ، فاننا نستنتج من (7) أن

$$(8a) \quad -p(-y_1 - z) - \bar{f}(z) \leq c \quad \text{أيا كان } z \text{ من } \mathcal{D}(\bar{f})$$

$$(8b) \quad c \leq p(y + y_1) - \bar{f}(y) \quad \text{أيا كان } y \text{ من } \mathcal{D}(\bar{f})$$

سنثبت (6) أولا عندما يكون α سالبا في (5) ، ثم عندما يكون α موجبا • فاذا كان $\alpha < 0$ فاننا نستعمل (8a) حيث نعوض z بالمقدار $\alpha^{-1}y$:

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \bar{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq c.$$

ونجد بعد الضرب بـ $-\alpha > 0$ أن

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y\right) + \bar{f}(y) \leq -\alpha c.$$

نستنتج من هذا ومن (5) باستعمال $y + \alpha y_1 = x$ (الواردة قبل قليل) صحة المتباينة المنشودة التالية

$$g_1(x) = \bar{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y\right) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

وإذا كان $\alpha = 0$ نجد أن $x \in \mathcal{D}(\bar{f})$ ، وعندئذ لا يوجد ما يحتاج إلى برهان . أما إذا كان $\alpha > 0$ ، فإننا نجد باستخدام (8b) بعد تعويض y بـ $\alpha^{-1}y$ أن

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha} y + y_1\right) - \bar{f}\left(\frac{1}{\alpha} y\right).$$

ونجد بعد الضرب بـ $\alpha > 0$ أن

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha} y + y_1\right) - \bar{f}(y) = p(x) - \bar{f}(y).$$

نستنتج من هذا ومن (5) أن

$$g_1(x) = \bar{f}(y) + \alpha c \leq p(x).$$

لنطرح السؤال عما إذا كان من الممكن اثبات المبرهنة السابقة دون اللجوء إلى تمهيدية زورن . إن هذا السؤال هام ، وبخاصة لأن هذه التمهيدية لا تمدنا بطريقة صحي الانشاء . إذا أخذنا في (5) f بدلا من \bar{f} ، فإننا نجد لكل عدد حقيقي c ممددا خطأ $g_1 \downarrow f$ إلى الفضاء الجزئي Z_1 المولد بـ $\mathcal{D}(f) \cup \{y_1\}$ ، ويمكننا اختيار c بحيث أن $g_1(x) \leq p(x)$ أيا كان x من Z_1 ، كما نرى من الشق (ج) من البرهان عند استبدال \bar{f} بـ f . فإذا كان $X = Z_1$ فالمشكلة تكون قد حلت . أما إذا كان $X \neq Z_1$ ، فيمكن أخذ $y_2 \in X - Z_1$ ، وتكرار الطريقة لتمديد f إلى المولد بـ Z_1

و y_2 ، وهلم جرا . وبذا نتوصل الى متتالية من الفضاءات الجزئية Z_i ، كل منها يحوي سابقة ، وهي بحيث يمكن تمديد f خطيا من كل منها الى الذي يليه ، كما أن الممدد g_i يحقق الشرط $g_i(x) \leq p(x)$ أيا كان x من Z_i . فاذا كان

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$$

فان المسألة تكون قد حلت بعد n من الخطوات ، واذا كان

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$$

فمن الممكن استعمال الاستقراء العادي . بيد أنه اذا لم يوجد لـ X مثل هذا التمثيل ، فلا مناص لنا من الاستعانة بتمهيدية زورن في البرهان الذي أوردناه . وبالطبع ، فقد يكون الوضع بكامله أبسط في الحالات الخاصة . وفضاء هلبرت من هذا النمط بسبب تمثيل ريس ٣-٨-١ ، وسندرس هذا في البند التالي .

مسائل

- ١ - بين بأن القيمة المطلقة للدالي الخطي تتمتع بالخواص المعبر عنها بـ (1) و (2) .
- ٢ - بين بأن التنظيم على فضاء متجهي X هو دالي خطي جزئيا على X .
- ٣ - بين بأن $p(x) = \overline{\lim} \varepsilon_n$ حيث $x = (\xi_n) \in I^*$ و ε_n حقيقي ، يحدد داليا خطيا جزئيا على I^* .
- ٤ - بين بأن الدالي الخطي جزئيا p يحقق الشرطين $p(0) = 0$ و $p(-x) \leq -p(x)$.
- ٥ - (المجموعة الحبة) اذا كان p داليا خطيا جزئيا على فضاء خطي X ،

فبين أن (مثبت $\gamma, \gamma > 0$) مجموعة محدبة (راجع البند ٣-٣)

٦ - إذا كان p داليا وجميعا جزئيا على فضاء منظم X ، وكان p مستمرا في

النقطة 0 و $p(0)=0$ ، فبين أن p مستمر في كل x من X *

٧ - إذا كان p_1 و p_2 دالين خطيين جزئيا على فضاء متجهي X ، وكان c_1 و c_2

ثابتين موجبين ، فبين أن $p = c_1 p_1 + c_2 p_2$ خطي جزئيا على X *

٨ - إذا كان دالي جميعا جزئيا على فضاء منظم X وغير سالب خارج الكرة

$\{x \mid \|x\| = r\}$ فبين أنه غير سالب في كل x من X *

٩ - ليكن p داليا خطيا جزئيا على فضاء متجهي حقيقي X * لنفترض f معرفا

على المجموعة $Z = \{x \in X \mid x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ بالدستور $f(x) = \alpha p(x_0)$ حيث x_0

عناصر مثبت من X * بين أن f دالي خطي على Z يحقق المتباينة $f(x) \leq p(x)$ *

١٠ - إذا كان p داليا خطيا جزئيا على فضاء منجهي حقيقي X ، فبين أن ثمة داليا

خطيا f على X بحيث أن $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$ *

٣-٤ مبرهنة هان - باناخ في الفضاءات المتجهية العقدية والفضاءات المنظمة

تتعلق مبرهنة هان - باناخ ١-٢-٤ بالفضاءات المتجهية الحقيقية * وقد

توصل ف. بونتلاست و أ. زوبشيك عام ١٩٣٨ م. الى تعميم يحوي الفضاءات

المتجهية العقدية *

١-٢-٤ مبرهنة هان - باناخ (المعممة)

ليكن X فضاء متجهيا حقيقيا او عقديا ، وليكن p داليا خطيا حقيقيا على X

ولنفترض ان p جمعي جزئيا ، اي انه ايا كان x و y من X فان

$$(1) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

(كما في البرهنة ٤-٢-١) ، ولنفترض كذلك أنه أيا كان العدد α فإن

$$(2) \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$$

لنفترض كذلك أن f دالي خطي معرف على فضاء جزئي Z من X ويحقق الشرط

$$(3) \quad |f(x)| \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } Z$$

عندئذ يوجد لـ f ممدد خطي \bar{f} من Z إلى X يحقق الشرط

$$(3^*) \quad |\bar{f}(x)| \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X$$

البرهان :

(أ) حالة الفضاءات الحقيقية . إذا كان الفضاء X حقيقيا ، فإن المسألة سهلة . عندئذ تقتضي (3) أن يكون $f(x) \leq p(x)$ أيا كان x من Z . وبالتالي نجد اعتمادا على مبرهنة هان - باناخ ٤-٢-١ وجود ممدد خطي \bar{f} من Z إلى X بحيث يكون

$$(4) \quad \bar{f}(x) \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X$$

نستنتج من هذا ومن (2) أن

$$-\bar{f}(x) = \bar{f}(-x) \leq p(-x) = |-1| p(x) = p(x),$$

أي أن $\bar{f}(x) \geq -p(x)$. يترتب على هذا وعلى (4) صحة (3*) .

(ب) حالة الفضاءات العقدية . ليكن X عقديا ، عندئذ يكون Z فضاء متجهيا

عقديا كذلك . وبالتالي فإن قيم f عقدية ، ويمكن كتابة المساواة

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \quad x \in Z$$

حيث f_1 و f_2 حقيقيان . لننظر مؤقتا إلى X و Z بأنهما فضاءان متجهيان حقيقيان، ولنرمز لهما بـ X_r و Z_r على الترتيب ، ان هذا يعني ببساطة أننا نقصر الضرب بالأعداد على الأعداد الحقيقية (بدلا من الأعداد العقدية) . وبما أن f خطي

على Z ، وأن f_1 و f_2 قيما حقيقية فإن f_1 و f_2 داليان خطيان على Z . كذلك
فإن $f_1(x) \leq |f(x)|$ نظرا لكون القسم الحقيقي من عدد عقدي لا يتجاوز قيمته
المطلقة . لذا فاننا نجد استنادا الى (3) أن

$$f_1(x) \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } Z_r$$

واعتمادا على مبرهنة هان — باناخ ١-٢-٤ ، فانه يوجد ممدد خطي \bar{f}_1 لـ f_1 من
 Z_r الى X_r بحيث يكون

$$(5) \quad \bar{f}_1(x) \leq p(x) \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X_r$$

لنتنقل الى f_2 بعد أن درسنا f_1 . فإذا عدنا الى Z باستعمال $f = f_1 + if_2$ ، فاننا
نجد المساواة التالية أيا كان x من Z

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

وبمطابقة القسمين الحقيقيين في الطرفين نجد أن

$$(6) \quad f_2(x) = -f_1(ix) \quad x \in Z.$$

لذا ، فاننا اذا وضعنا المساواة أيا كان x من X

$$(7) \quad \bar{f}(x) = \bar{f}_1(x) - if_1(ix) \quad x \in X_r$$

فاننا نجد من (6) أن $\bar{f}(x) = f(x)$ على Z ، وهذا يبين أن \bar{f} ممدد لـ f من Z
الى X . بقي علينا اثبات ما يلي :

(i) \bar{f} دالي خطي على الفضاء المتجهي العقدي X .

(ii) \bar{f} يحقق (3*) على X .

أما صحة (i) ، فأمر يمكن رؤيته من الحسابات التالية التي تعتمد على (7) وعلى
خطية \bar{f}_1 على الفضاء المتجهي الحقيقي X_r ، ونفرض هنا أن $a + ib$ أي عدد

عقدي حيث a و b حقيقيان :

$$\begin{aligned} f((a+ib)x) &= f_1(ax+ibx) - if_1(iax-bx) \\ &= af_1(x) + bf_1(ix) - i[af_1(ix) - bf_1(x)] \\ &= (a+ib)[f_1(x) - if_1(ix)] \\ &= (a+ib)f(x). \end{aligned}$$

سنثبت الآن صحة (ii) • نلاحظ أنه أيا كان x الذي يحقق المساواة $\bar{f}(x) = 0$ ، فإن (ii) صحيحة لكون $p(x) \geq 0$ وفق (1) و (2) ، راجع كذلك المسألة ١ • نفترض الآن x الذي يحقق الشرط $\bar{f}(x) \neq 0$ • عندئذ يمكن أن نكتب مستعملين الصيغة القطبية للمقادير العقدية ما يلي :

$$|\bar{f}(x)| = \bar{f}(x)e^{-i\theta} = f(e^{-i\theta}x) \quad \text{وهكذا فإن} \quad \bar{f}(x) = |\bar{f}(x)|e^{i\theta}$$

وبما أن $|\bar{f}(x)|$ حقيقي ، فإن العبارة الأخيرة حقيقية ، وهي بالتالي تساوي قسمها الحقيقي • لذا يترتب على (2) أن

$$|\bar{f}(x)| = \bar{f}(e^{-i\theta}x) = f_1(e^{-i\theta}x) - ip(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

وبذا يكتمل البرهان •

وعلى الرغم من أن مبرهنة هان - باناخ لا تنص مباشرة على الاستمرار ، فتم تطبيق رئيسي لهذه المبرهنة يتعلق بالداليات الخطية والمحدودة. وهذا يعيدنا إلى الفضاءات المنظمة التي تقع في مركز اهتمامنا • وفعلا ، فإن المبرهنة ٤-٣-١ تقتضي المبرهنة الأساسية التالية :

٤-٣-٢ مبرهنة هان - باناخ (الفضاءات المنظمة)

ليكن f داليا خطيا ومحدودا على فضاء جزئي Z من فضاء منظم X • عندئذ يوجد دالي خطي محدود \bar{f} على X يشكل ممددا لـ f إلى X وله التنظيم نفسه

(8)

$$\|\bar{f}\|_X = \|f\|_Z$$

حيث

$$\|f\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\bar{f}(x)|, \quad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

(حيث $\|f\|_Z = 0$ في الحالة التافهة $Z = \{0\}$) •

البرهان :

إذا كان $Z = \{0\}$ ، فإن $f = 0$ ، ويكون الممدد $\bar{f} = 0$. لنفترض الآن أن $Z \neq \{0\}$. إذا أردنا الاستعانة بالبرهنة ٣-١ ، فلا بد لنا من اكتشاف p مناسب • لدينا أيا كان x من Z المتباينة

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|.$$

وهي من النمط (3) ، حيث

$$(9) \quad p(x) = \|f\|_Z \|x\|.$$

من الواضح أن p معرفة على X بأكمله . كذلك ، فإن p تحقق (1) على X ، ذلك أنه يترتب على متباينة المثلث أن

$$p(x+y) = \|f\|_Z \|x+y\| \leq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

أن p تحقق أيضا (2) على X لأن

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x).$$

وبالتالي فمن الممكن تطبيق البرهنة ٣-١ واستنتاج وجود دالي خطي \bar{f} على X هو ممدد لـ f ويحقق التالي :

$$|\bar{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\| \quad x \in X.$$

وبأخذ الـ \sup عندما يسمح x كل عناصر X التي نظيمها 1 ، فاننا نجد المتباينة

$$\|f\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\bar{f}(x)| \leq \|f\|_Z.$$

ولما كان النظيم لا يمكن أن يتناقص لدى التمديد ، فاننا نجد أيضا أن $\|f\|_X \geq \|f\|_Z$. نستنتج من هذه المتباينة وسابقتها أن (8) صحيحة ، وبهذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة ١٠

هذا وقد يغدو الوضع سهلا جدا في بعض الحالات الخاصة ، وفضاءات هلبرت هي واحدة من هذه الحالات . ففعلا ، فإذا كان Z فضاء جزئيا مغلقا من فضاء هلبرت $X=H$ ، فانه يوجد لـ f تمثيل ريس ٣-١ ، وليكن

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad z \in Z$$

حيث $\|z\| = \|f\|$. وبالطبع ، فلما كان الجداء الداخلي معرفا على H بأكمله ، فان هذا يعطي حالا ممددا خطيا لـ f من Z الى H ، ويكون لـ f النظيم نفسه الذي لـ f ، ذلك أن $\|f\| = \|z\| = \|f\|$ استنادا الى المبرهنة ٣-١ . لذا فان التمديد في هذه الحالة مباشر .

سنستق الآن من المبرهنة ٤-٣-٢ نتيجة مفيدة أخرى يمكن القول بأنها تبين بأن الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X يتألف من عدد كبير بقدر كاف من الداليات الخطية المحدودة للتمييز بين نقاط X . ان هذا يغدو أساسيا فيما يتعلق بالمؤثرات المترافقة (البند ٤-٥) وما يسمى بالتقارب الضعيف (البند ٤-٨) .

٢-٣-٤ مبرهنة (الداليات الخطية المحدودة)

ليكن X فضاء منظما ، وليكن $x_0 \neq 0$ اي عنصر من X . عندئذ يوجد دالي خطي وحيد \bar{f} على X بحيث يكون

$$\|f\| = 1, \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

البرهان :

سنأخذ الفضاء الجزئي Z من المؤلف من جميع العناصر $x = \alpha x_0$ بفرض عددا ما . لنعرف على Z داليا خطيا f كما يلي :

$$(10) \quad f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|.$$

ان f محدود ونظيمه $\|f\| = 1$ لان

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|.$$

ان البرهنة ٤-٣-٢ تقتضي وجود ممدد خطي f لـ f من Z الى X نظيمه $\|f\| = \|f\| = 1$. ونرى بالنظر الى (10) أن $f(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$ ■

٤-٣-٤ نتيجة (النظيم ، المتجه الصفري)

ايا كان x من الفضاء النظم X فان

$$(11) \quad \|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

لذا فانه اذا كان x_0 محققا للمساواة $f(x_0) = 0$ ايا كان f من X' فان $x_0 = 0$.

البرهان :

نستنتج من البرهنة ٤-٣-٣ لدى كتابة x بدلا من x_0 أن

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|,$$

كما نستنتج من المتباينة $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ أن

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|.$$

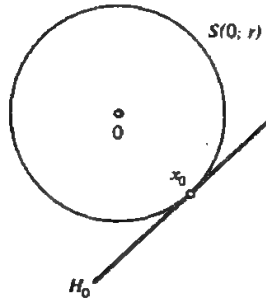
مسائل

- ١ - (نصف التنظيم) • بين بأن (1) و (2) يقتضيان $p(0)=0$ و $p(x) \geq 0$ ،
أي أن p هو نصف قليم (راجع المسألة ١٢ من البند ٢-٣) •
- ٢ - بين بأن (1) و (2) يقتضيان $|p(x)-p(y)| \leq p(x-y)$ •
- ٣ - لقد بينا أن \bar{f} المحدد بـ (7) هو دالي خطي على الفضاء المتجهي المقدي X •
أثبت أنه يكفي للوصول الى هذا البرهان على أن $\bar{f}(ix) = i\bar{f}(x)$ •
- ٤ - ليكن p معرفا على فضاء متجهي X ويحقق الشرطين (1) و (2) • بين بأنه
إذا كان x_0 أي عنصر معطى في X ، فهناك دالي خطي f على X بحيث أن
 $\bar{f}(x_0) = p(x_0)$ وأن $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ أيا كان x من X •
- ٥ - إذا كان X في المبرهنة ٤-٣-١ فضاء منظما وكان $p(x) \leq k\|x\|$ حيث k
عدد موجب ، فبين أن $\|\bar{f}\| \leq k$ •
- ٦ - لايضاح المبرهنة ٤-٣-٢ نأخذ داليا f على الفضاء الاقليدي \mathbb{R}^2 معرفا
بالمساواة $f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ حيث $x = (\xi_1, \xi_2)$ • أوجد ممدداته \bar{f} الى
 \mathbb{R}^3 والنظائم الموافقة •
- ٧ - قدم برهانا آخر للمبرهنة ٤-٣-٣ في حالة فضاء هيلبرت •
- ٨ - ليكن X فضاء منظما و X' فضاءه الثنوي • فإذا كان $X \neq \{0\}$ ، بين أن X'
لا يمكن أن يكون $\{0\}$ •
- ٩ - بين أنه في حالة فضاء منظم فضول X ، فمن الممكن اثبات المبرهنة ٤-٣-٢
مباشرة دون اللجوء الى تمهيدية زورن (التي استعملناها بصورة مباشرة ،
وذلك في اثبات المبرهنة ٤-٢-١) •
- ١٠ - توصل الى الدعوى الثانية في ٤-٣-٤ مباشرة من ٤-٣-٣ •
- ١١ - إذا كان $f(x) = f(y)$ أيا كان الدالي الخطي المحدود f على فضاء منظم X ،
فبين أن $x = y$ •

١٢- لا يوضح البرهنة ٣-٣-٤ ، افترض أن X المستوي الاقليدي \mathbb{R}^2 ، وأوجد الدالي f .

١٣- أثبت أنه في حدود الافتراضات في البرهنة ٣-٣-٤ ، فانه يوجد دالي خطي محدود f على X بحيث أن $\|f\| = \|x_0\|^{-1}$ وأن $f(x_0) = 1$.

١٤- (فوق المستوي) . بين بأنه لكل قشرة كروية $S(0; r)$ في فضاء منظم X وكل نقطة $x_0 \in S(0; r)$ يوجد فوق مستوي H_0 يحوي x_0 بحيث تقع الكرة $\bar{B}(0; r)$ بكاملها في واحد من نصفي الفضاء المحددين بـ H_0 . (راجع المسألتين ١٢ و ١٥ من البند ٨-٢) . ويعطي الشكل ٣٩ ايضاحا بسيطا لهذا الامر .



الشكل (٣٩) . ايضاح المسألة ١٤ في حالة المستوي الاقليدي \mathbb{R}^2

٤-٤ تطبيق على الداليات الخطية المحدودة على $C[a, b]$

لبرهنة هان - باناخ ٢-٣-٤ تطبيقات هامة عديدة ، قدمنا واحدا منها في البند السابق ، وسنورد تطبيقا آخر في هذا البند . وسنستعين بالبرهنة ٢-٣-٤ للحصول على دستور يتعلق بالتمثيل العام للداليات الخطية المحدودة على $C[a, b]$ ، حيث $[a, b]$ فترة متراصة مثبتة . وقد سبق وشرحنا في نهاية البند ١٠-٢ أهمية

التمثيلات العامة للداليات على فضاءات خاصة • وبما أن التمثيل الذي نعني به الآن سيكون بدلالة تكامل ريمان - ستيلجس ، فائنا نجد من المناسب التذكير بتعريف عدد قليل من خواص هذا التكامل ، الذي هو تعميم لتكامل ريمان المعروف • سنبتدىء بالمفهوم التالي :

نقول عن دالة w معرفة على $[a, b]$ انها **تغير محدود** على $[a, b]$ اذا كان **تغيرها الكلي** $\text{Var}(w)$ على $[a, b]$ منتهيا ، حيث

$$(1) \quad \text{Var}(w) = \sup \sum_{j=1}^n |w(t_j) - w(t_{j-1})|,$$

حيث يؤخذ ال \sup على كل التجزئات

$$(2) \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

للفترة $[a, b]$ • ان n هنا هو كفي ، وكذلك اختيار القيم t_1, \dots, t_{n-1} في $[a, b]$ التي يجب عليها أن تحقق (2) •

من الواضح أن كل الدوال ذات التغير المحدود على $[a, b]$ تشكل فضاء متجهيا ، ويعرف التنظيم على هذا الفضاء بالدستور

$$(3) \quad \|w\| = |w(a)| + \text{Var}(w).$$

ويرمز للفضاء المنظم المعروف بهذا الشكل بـ $BV[a, b]$ ، حيث يمثل B الحرف الاول من كلمة **bounded** (أي محدود) ، و V الحرف الاول من كلمة **variation** (أي تغير) •

سنجد الآن مفهوم تكامل ريمان - ستيلجس على النحو التالي : ليكن $x \in C[a, b]$ و $w \in BV[a, b]$ • لنفترض أن P_n تجزئة ما لـ $[a, b]$ معطاة بـ (2) ، ولنرمز بـ $\eta(P_n)$ الى طول أكبر فترة $[t_{j-1}, t_j]$ ، أي أن

$$\eta(P_n) = \max (t_1 - t_0, \dots, t_n - t_{n-1}).$$

لنقابل كل تجزئة P_n لـ $[a, b]$ بالمجموع

$$(4) \quad s(P_n) = \sum_{j=1}^n x(t_j) [w(t_j) - w(t_{j-1})].$$

يوجد عدد δ يتمتع بخاصة أنه إذا كان ε عددا موجبا ما ، فثمة عدد موجب δ بحيث أن

$$(5) \quad \eta(P_n) < \delta$$

تقتضي أن يكون

$$(6) \quad |s - s(P_n)| < \varepsilon.$$

يدعى w تكامل ريمان - ستيلجس لـ x على $[a, b]$ بالنسبة الى w ويرمز له بـ

$$(7) \quad \int_a^b x(t) dw(t).$$

لذا فمن الممكن الحصول على (7) كنهاية المجاميع (4) لمتتالية (P_n) من تجزئات $[a, b]$ التي تحقق $\eta(P_n) \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$.

لاحظ أنه إذا كان $w(t) = t$ فإن التكامل (7) هو تكامل ريمان المعروف لـ x على $[a, b]$.

كذلك ، فإذا كانت x مستمرة ، ووجد لـ w مشتق كمول على $[a, b]$ فإن

$$(8) \quad \int_a^b x(t) dw(t) = \int_a^b x(t) w'(t) dt$$

حيث تعني ، الاشتقاق بالنسبة الى t .

ان التكامل (7) دالة خطية لـ $x \in C[a, b]$ ، أي أنه إذا كان $x_1, x_2 \in C[a, b]$ و α و β أي عددين فإن

$$\int_a^b [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] dw(t) = \alpha \int_a^b x_1(t) dw(t) + \beta \int_a^b x_2(t) dw(t).$$

ان التكامل دالة خطية أيضا لـ $w \in BV[a, b]$: أي أنه اذا كان $w_1, w_2 \in BV[a, b]$ وكان γ و δ أي عددين فان

$$\int_a^b x(t) d(\gamma w_1 + \delta w_2)(t) = \gamma \int_a^b x(t) dw_1(t) + \delta \int_a^b x(t) dw_2(t).$$

سنحتاج أيضا الى المتباينة

$$(9) \quad \left| \int_a^b x(t) dw(t) \right| \leq \max_{t \in J} |x(t)| \text{Var}(w),$$

حيث $J = [a, b]$: نلاحظ بأن هذا يعمم دستوراً معروفاً في علم التفاضل والتكامل. وفي الحقيقة ، فاذا كان $w(t) = t$ فان $\text{Var}(w) = b - a$ ، وعندئذ تغدو (9) بالشكل

$$\left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq \max_{t \in J} |x(t)| (b - a).$$

يمكن بعد هذا صياغة مبرهنة التمثيل للداليات الخطية المحدودة على $C[a, b]$ التي توصل اليها ريس عام ١٩٠٩ على النحو التالي :
{-1-} مبرهنة ريس (الداليات على $C[a, b]$)

كل دالي خطي محدود f على $C[a, b]$ يمكن تمثيله بتكامل ريمان-ستييجس

$$(10) \quad f(x) = \int_a^b x(t) dw(t)$$

حيث w ذو تغير محدود على $[a, b]$ وتغيره الكلي هو

$$(11) \quad \text{Var}(w) = \|f\|.$$

البرهان :

نرى من مبرهنة هان - باناخ ٤-٣-٢ المتعلقة بالفضاءات المنظمة أنه يوجد لـ f ممدد \bar{f} من $C[a, b]$ الى الفضاء المنظم $B[a, b]$ المؤلف من كل الدوال المحدودة على $[a, b]$ حيث التنظيم معرف بالمساواة
 $\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)|$ $J = [a, b]$.

وفضلا عن ذلك ، فانه يترتب على هذه المبرهنة أن الدالي الخطي f محدود وله
 قديم f نفسه ، أي أن

$$\|f\| = \|f\|.$$

سنعرف دالة w نحتاجها في (10) • ولهذا نأخذ الدالة x_t المبينة في
 الشكل (٤٠) • هذه الدالة معرفة على $[a, b]$ وقيمتها تساوي 1 على $[a, t]$
 وتساوي 0 فيما عدا ذلك ، ومن الواضح أن $x_t \in B[a, b]$ • تسمى x_t الدالة المميزة
 للفترة $[a, t]$ • وبلاستعانة بـ x_t والدالي \tilde{f} ، فاننا نعرف w على $[a, b]$
 بالشكل

$$w(a) = 0 \quad w(t) = \tilde{f}(x_t), \quad t \in (a, b].$$

• سنبين أن هذه الدالة w ذو تغير محدود وأن $\text{Var}(w) \leq \|f\|$

سنستعمل للمقادير العقدية الصيغة القطبية • وفي الحقيقة ، فاذا وضعنا
 $\theta = \arg \zeta$ فانه يمكننا كتابة التالي

$$\zeta = |\zeta| e(\zeta) \quad \text{حيث} \quad e(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta = 0 \\ e^{i\theta} & \text{if } \zeta \neq 0. \end{cases}$$



الشكل (٤٠) • الدالة x_t

نلاحظ أنه اذا كان $\zeta \neq 0$ ، فان $|\zeta| = \zeta / e^{i\theta} = \zeta e^{-i\theta}$ • وبالتالي فانه أيا كان ζ ،
 سواء أكان صفريا أم لم يكن ، نجد

$$(12) \quad |\zeta| = \overline{\zeta e(\zeta)},$$

حيث يرمز - الى المرافق العقدي كما هو مألوف • وبقصد تبسيط الدساتير اللاحقة
فاننا سنفترض أيضا أن

$$\varepsilon_j = \overline{w(t_j) - w(t_{j-1}))}$$

وأن $x_i = x_j$ ، الامر الذي يجنبنا كتابة أدلة الادلة • عندئذ يترتب على (12) أنه
أيا كانت التجزئة (2) فاننا نجد أن

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |w(t_j) - w(t_{j-1})| &= |\bar{f}(x_1)| + \sum_{j=2}^n |\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})| \\ &= \varepsilon_1 \bar{f}(x_1) + \sum_{j=2}^n \varepsilon_j [\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})] \\ &= \bar{f} \left(\varepsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^n \varepsilon_j [x_j - x_{j-1}] \right) \\ &\leq \|\bar{f}\| \left\| \varepsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^n \varepsilon_j [x_j - x_{j-1}] \right\|. \end{aligned}$$

إن $\|\bar{f}\| = \|f\|$ في الطرف الايمن (راجع ما سبق) ، كما أن العامل $\|\cdot\|$
يساوي 1 ذلك أن $|\varepsilon_j| = 1$ ، وأنا نستنتج من تعريف x_j أنه اذا كان $t \in [a, b]$
فإن واحدا فقط من الحدود x_1 و $x_2 - x_1$ ، ... غير صفري (ونظيمه يساوي 1) •
يمكننا الآن أن نأخذ الى sup في الطرف الايسر على كل تجزئات $[a, b]$ ،
وعندئذ نجد أن

$$(13) \quad \text{Var}(w) \leq \|f\|.$$

لذا فان w ذو تغير محدود على $[a, b]$ •

سنثبت الآن صحة (10) ، حيث $x \in C[a, b]$ • لنعرف لكل تجزئة P_n ل (2)
دالة ، نرمز اليها اختصارا بـ z_n [بدلا من $z(P_n)$ أو z_{P_n} مثلا] ، محتفظين في
ذاكرتنا أن z_n تعتمد على P_n ، وليس على n فقط • ان دستور التعريف هو

$$(14) \quad z_n = x(t_0)x_1 + \sum_{j=2}^n x(t_{j-1})[x_j - x_{j-1}].$$

عندئذ يكون $z_n \in B[a, b]$ ونجد استنادا الى تعريف w أن

$$\begin{aligned} \bar{f}(z_n) &= x(t_0)\bar{f}(x_1) + \sum_{j=2}^n x(t_{j-1})[\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})] \\ (15) \quad &= x(t_0)w(t_1) + \sum_{j=2}^n x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})], \end{aligned}$$

حيث تنتج المساواة الاخيرة من أن $w(t_0) = w(a) = 0$. نختار الآن أي متالية (P_n) من التجزئات لـ $[a, b]$ بحيث أن $\eta(P_n) \rightarrow 0$ [راجع (5)] . (لاحظ أن الأعداد t_j في (15) تعتمد على P_n ، وهذه حقيقة نحتفظ بها في ذاكرتنا دون التعبير عنها برموز أكبر ، مثل الرمز $t_{j,n}$) . نرى أنه عندما $n \rightarrow \infty$ فإن المجموع في الطرف الايمن من (15) يقترب من التكامل الوارد في (10) ، وبالتالي فإن (10) صحيحة شريطة أن يكون $\bar{f}(z_n) \rightarrow \bar{f}(x)$ ، حيث $\bar{f}(x)$ يساوي $f(x)$ لأن $x \in C[a, b]$.

سنبين بأن $\bar{f}(z_n) \rightarrow \bar{f}(x)$. فإذا أعدنا الى الذاكرة تعريف x_i (أنظر الى الشكل ٤٠) ، فالتا نرى بأنه يترتب على (14) أن $z_n(a) = x(a) \cdot 1$ نظرا لكون المجموع في (14) صفرا عندما $t = a$. إذن $z_n(a) - x(a) = 0$. فضلا عن ذلك ، فإنه يترتب على (14) أنه اذا كان $t_{j-1} < t \leq t_j$ فالتا نجد عندئذ أن $z_n(t) = x(t_{j-1}) \cdot 1$. وبالتالي فالتا نجد لهذه الأعداد t أن

$$|z_n(t) - x(t)| = |x(t_{j-1}) - x(t)|.$$

لذا فانه اذا كان $\eta(P_n) \rightarrow 0$ ، فإن $\|z_n - x\| \rightarrow 0$. لأن x مستمرة على $[a, b]$ ، وبالتالي منتظمة الاستمرار على $[a, b]$ نظرا لكون $[a, b]$ متراسة . إذن فان استمرار \bar{f} يقتضي الآن أن $\bar{f}(z_n) \rightarrow \bar{f}(x)$ ، وبالتالي فان $\bar{f}(x) = f(x)$ ، ونكون بذلك قد أثبتنا صحة (10) .

سنثبت أخيراً صحة (11) • نستنتج من (10) و (9) أن

$$|f(x)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| \operatorname{Var}(w) = \|x\| \operatorname{Var}(w).$$

وبأخذ \sup على كل الدوال x في $C[a, b]$ التي نظيمها ، فإننا نجد أن $\|f\| \leq \operatorname{Var}(w)$ • وبضم هذه المتباينة إلى (13) نجد (11) • نلاحظ أن w في المبرهنة ليست وحيدة ، إلا أنه يمكن جعلها وحيدة بفرض شروط تجعل من w صفراً في النقطة a ومستمرًا من اليمين :

$$w(a) = 0, \quad w(t+0) = w(t) \quad (a < t < b).$$

لمزيد من التفاصيل : راجع الصفحات من 197-200 من كتاب

Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis*. New York: Wiley

والصفحة 111 من كتاب

Riesz, F., and B. Sz.-Nagy (1955), *Functional Analysis*. New York: Ungar

ومن الطريف أن مبرهنة ريس ساهمت فيما بعد كنقطة انطلاق للنظرية الحديثة في المكاملة • ولمزيد من الملاحظات التاريخية راجع الصفحة 169 من كتاب

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. III à V. Paris: Hermann

٤-٥ المؤثر المرافق

يمكننا أن نقرن بكل مؤثر خطي ومحدود $T: X \rightarrow Y$ على فضاء منظم X ما يسمى بالمؤثر المرافق $T^* \in T'$ • ومن دواعي الاهتمام بـ T^* استعمالاته في حل معادلات تحوي مؤثرات ، الأمر الذي سنراه في البند ٥-٥ ، وتبرز مثل هذه المعادلات على سبيل المثال في الفيزياء وفي تطبيقات أخرى • سنعرف في هذا البند المؤثر المرافق T^* ونبحث في بعض خواصه ، بما فيها علاقته بمؤثر هلبرت

المرافق T^* (*) الذي سبق وعرفناه في البند ٣-٩ . ومن المهم الملاحظة بأن دراستنا الحالية تعتمد على مبرهنة هان - باناخ (من خلال المبرهنة ٣-٤-٣) .
وأنا لن تتمكن من المضي بعيدا بمعزل عنها .

ليكن $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءان منظمان ،
ولنحدد المؤثر المرافق $T^* \downarrow T$. لهذا نتطرق من أي دالي خطي محدود g على Y .
من الواضح أن g معرف أيا كان y من Y . فإذا وضعنا $y = Tx$ ، فأننا نجد
داليا على X ، نرمز له بـ f :

$$(1) \quad f(x) = g(Tx) \quad x \in X.$$

ان f خطي نظرا لكون g و T خطيين . كذلك ، فان f محدود لان

$$|f(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\| \|Tx\| \leq \|g\| \|T\| \|x\|.$$

فإذا أخذنا الـ \sup على كل العناصر x من X التي نظيمها 1 ، فأننا نجد المتباينة

$$(2) \quad \|f\| \leq \|g\| \|T\|.$$

وهذا يبين أن $f \in X'$ ، حيث X' هو الفضاء الثنوي لـ X المعروف في ٢-١٠-٣ .
ولما كان $g \in Y'$ فرضا ، فإن الدستور (1) يعرف للمتغير g من Y' مؤثرا من Y'
في X' يسمى المؤثر المرافق لـ T ، ويرمز له بـ T^* . لذلك نجد أن

* في حالة فضاءات هلبرت ، فان المؤثر المرافق T^* ليس مطابقا لمؤثر هلبرت المرافق $T^* \downarrow T$ (رغم أنه عندئذ يكون T^* و T^* مرتبطا أحدهما بالآخر كما سنرى فيما بعد في هذا البند) . ان النجمة * التي نشير بها الى مؤثر هلبرت المرافق تستعمل في جميع الكتب تقريبا للدلالة على هذا المؤثر . لذا فلا يجوز الدلالة على المؤثر المرافق بـ T^* لانه أمر مزعج أن نستعمل رمزا يسدل على شيء في فضاء هلبرت وعلى شيء آخر في نظرية الفضاءات المنظمة العامة . لذا سنستعمل T^* للدلالة على المؤثر المرافق ، ونفضله على الرمز الاقل دلالة T^* والمستعمل أيضا في بعض الكتب .

$$(3) \quad X \xrightarrow{T} Y$$

$$X' \xleftarrow{T^*} Y'$$

لاحظ بامعان أن T^* مؤثر معرف على Y' ، في حين أن المؤثر المعطى T معرف على X . سنلخص ما سبق فيما يلي :

١-٥-٤ تعريف (المؤثر المرافق T^*)

ليكن $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءان منظمان .
عندئذ نعرف المؤثر المرافق $T^*: Y' \rightarrow X'$ بالشكل

$$(4) \quad f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx) \quad (g \in Y')$$

حيث X' و Y' الفضاءان الثنويان لـ X و Y على الترتيب .

إن أول أهدافنا يكمن في اثبات أن للمؤثر المرافق تنظيم المؤثر نفسه ، وهذه خاصة رئيسية كما سنرى فيما بعد . سنحتاج في البرهان الى المبرهنة ٣-٣-٤ التي نتجت من مبرهنة هان - باناخ . وهكذا فإن مبرهنة هان - باناخ حيوية في صدد انشاء نظرية مرضية للمؤثرات المرافقة ، التي تشكل بدورها جزءا أساسيا من النظرية العامة للمؤثرات الخطية .

٢-٥-٤ مبرهنة (تنظيم المؤثر المرافق)

ان المؤثر المرافق T^* في التعريف ١-٥-٤ خطي ومحدود ، كما ان

$$(5) \quad \|T^*\| = \|T\|.$$

البرهان :

ان المؤثر T^* خطي لان ساحته Y' فضاء متجهي ولاننا نجد مباشرة أن

$$(T^x(\alpha g_1 + \beta g_2))(x) = (\alpha g_1 + \beta g_2)(Tx)$$

$$= \alpha g_1(Tx) + \beta g_2(Tx)$$

$$= \alpha (T^x g_1)(x) + \beta (T^x g_2)(x).$$

سنثبت صحة (5) • لدينا استنادا الى (4) أن $f = T^x g$ ، وعندئذ يترتب على (2) أن

$$\|T^x g\| = \|f\| \leq \|g\| \|T\|.$$

وبأخذ الـ \sup على كل العناصر g من Y' التي نظيمها 1 ، فائنا نجد المتباينة

$$(6) \quad \|T^x\| \leq \|T\|.$$

لذا فانه للحصول على (5) ، علينا أن تثبت الآن أن $\|T^x\| \leq \|T\|$ • ان المبرهنة ٣-٣-٤ تقتضي أنه يوجد لكل عنصر x_0 من X عنصر g_0 من Y' بحيث يكون

$$\|g_0\| = 1 \quad \text{و} \quad g_0(Tx_0) = \|Tx_0\|.$$

لدينا هنا $g_0(Tx_0) = (T^x g_0)(x_0)$ وفق تعريف المؤثر المرافق T^x • فاذا افترضنا أن $f_0 = T^x g_0$ ، نجد أن

$$\begin{aligned} \|Tx_0\| &= g_0(Tx_0) = f_0(x_0) \\ &\leq \|f_0\| \|x_0\| \\ &= \|T^x g_0\| \|x_0\| \\ &\leq \|T^x\| \|g_0\| \|x_0\|. \end{aligned}$$

ولما كان $\|g_0\| = 1$ ، فائنا نجد لكل x_0 من X المتباينة

$$\|Tx_0\| \leq \|T^x\| \|x_0\|.$$

(وهذا يشمل الحالة $x_0=0$ لان $T0=0$) • لكن لدينا دوما

$$\|Tx_0\| \leq \|T\| \|x_0\|,$$

كما أن $c = \|T\|$ هو هنا اصغر ثابت c بحيث تكون المتباينة $\|Tx_0\| \leq c \|x_0\|$ صحيحة
أيأ كان x_0 من X • لذا فلا يمكن أن يكون $\|T^*\|$ أصغر من $\|T\|$ ، أي أنه
يجب أن يكون $\|T^*\| \geq \|T\|$ • يترتب على هذا بالإضافة الى (6) صحة (5) • ■
لنشرح هذه المناقشة بالاستعانة بالمصفوفات المثلثة للمؤثرات • ان هذا
سيعين القارئ أيضا في ايراد أمثلة من عنده •

٢-٥-٤ مثال (المصفوفة)

من الممكن في الفضاء الاقليدي \mathbb{R}^n تمثيل المؤثر الخطي $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
بمصفوفة (راجع البند ٢-٩) حيث تعتمد هذه المصفوفة $T_E = (t_{jk})$ على اختيار
القاعدة $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ لـ \mathbb{R}^n التي نرتب عناصرها وفق ترتيب معين نبقية مشبها •
سنختار قاعدة E ، ونعتبر $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ متجهين عموديين،
ونستخدم الرمز المعتاد في ضرب المصفوفات • عندئذ يكون

$$(7) \quad \eta_j = \sum_{k=1}^n t_{jk} \xi_k \quad ، \quad y = T_E x$$

حيث $j = 1, \dots, n$ • لتكن $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ القاعدة الثنوية لـ E (راجع
البند ٢-٩) • ان F قاعدة لـ \mathbb{R}^n (الذي هو أيضا فضاء اقليدي بعده n استنادا
الى ٢-١٠-٥) • عندئذ يكون لـ g في \mathbb{R}^n تمثيل من الشكل

$$g = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

واعتمادا على تعريف القاعدة الثنوية لدينا $f_j(y) = \eta_j$ • لذا فاننا نجد
استنادا الى (7) أن

$$g(y) = g(T_E x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \eta_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \tau_{jk} \xi_k.$$

وبتغيير ترتيب الجمع ، فمن الممكن كتابة هذا بالشكل

$$(8) \quad \beta_k = \sum_{j=1}^n \tau_{jk} \alpha_j. \quad \text{حيث} \quad g(T_E x) = \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k$$

يسكننا اعتبار هذا على أنه تعريف لدالي f على X بدلالة g ، أي أن

$$f(x) = g(T_E x) = \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k.$$

وإذا أعدنا الى الذاكرة تعريف المؤثر المرافق ، فيمكننا كتابة ما يلي :

$$\beta_k = \sum_{j=1}^n \tau_{jk} \alpha_j. \quad \text{وباستعمال المركبات} \quad f = T_E^* g,$$

وبملاحظة أننا في β_k نجمع بالنسبة الى الدليل الايسر (وبالتالي فاننا نجتمع وفق كل عناصر عمود من T_E) ، فاننا نجد النتيجة التالية :

• إذا كان T ممثلاً بمصفوفة T_E ، فإن المؤثر المرافق T^* يمثل بمنقول T_E .

ومن الجدير بالذكر بأن هذا يصح أيضا إذا كان T مؤثرا خطيا من C^n في

C^n

ولدى التعامل مع المؤثر المرافق ، فلا تخلو الدساتير من (9) وحتى (12).
من الفائدة ، وستترك اقامة البراهين الموافقة للقارىء • ليكن $S, T \in B(X, Y)$ ،
راجع البند ٢-١٠ • عندها يكون

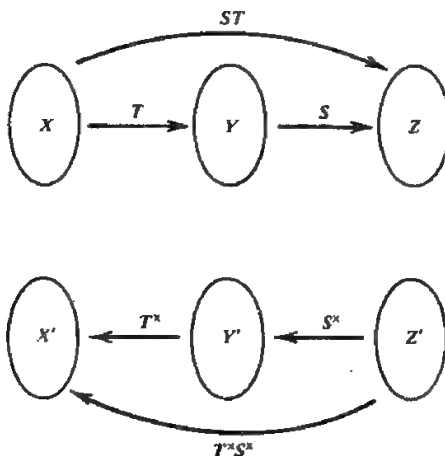
$$(9) \quad (S + T)^* = S^* + T^*$$

$$(10) \quad (\alpha T)^* = \alpha T^*.$$

• لنفترض أن X, Y, Z فضاءات منظمة ، وأن $T \in B(X, Y)$ و $S \in B(Y, Z)$

عندئذ نجد الدستور التالي للمؤثر المرافق لمركب المؤثرين ST (أنظر الى الشكل ٤١) •

$$(11) \quad (ST)^{\times} = T^{\times} S^{\times}.$$



الشكل (٤١) • ايضاح الدستور (11)

اذا كان $T \in B(X, Y)$ و T^{-1} موجودا ، وكان $T^{-1} \in B(Y, X)$ ، فان $(T^{\times})^{-1}$ يكون موجودا أيضا. ويكون $(T^{\times})^{-1} \in B(X', Y')$ ، وأيضا

$$(12) \quad (T^{\times})^{-1} = (T^{-1})^{\times}.$$

العلاقة بين المؤثر المرافق T^{\times} ومؤثر هيلبرت المرافق T^* • (راجع البند ٢-٩)

سنبين أن مثل هذه العلاقة موجودة في حالة مؤثر خطي محدود $T: X \rightarrow Y$ حينما يكون X و Y فضاءي هيلبرت ، مثلا $X = H_1$ و $Y = H_2$ • في هذه الحالة ، نجد أولا (الشكل ٤٢)

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2$$

(13)

$$H_1' \xleftarrow{T^{\times}} H_2'$$

حيث يعرف المؤثر المرافق T^* للمؤثر المعطى T كما في السابق على النحو التالي .

$$(14) \quad \begin{aligned} (a) \quad & T^* g = f \\ (b) \quad & g(Tx) = f(x) \end{aligned} \quad (f \in H_1', g \in H_2').$$

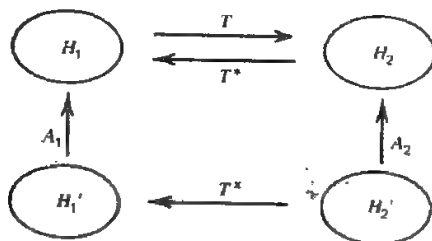
ان السمة الجديدة تتلخص في أنه لما كان f و g دالين على فضاءي هلبرت ، فانه يوجد لهما تمثيلان لريس (راجع البند ١٨٣) ، ولنفترض مثلا أن

$$(15) \quad \begin{aligned} (a) \quad & f(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad (x_0 \in H_1) \\ (b) \quad & g(y) = \langle y, y_0 \rangle \quad (y_0 \in H_2), \end{aligned}$$

وعندما نعلم أيضا من المبرهنة ١٨٣ أن x_0 و y_0 يتعيان بصورة وحيدة بـ f و g على الترتيب . ان هذا يعين المؤثرين

$$\begin{aligned} A_1: H_1' &\longrightarrow H_1 & \text{و} & \quad A_1 f = x_0, \\ A_2: H_2' &\longrightarrow H_2 & \text{و} & \quad A_2 g = y_0. \end{aligned}$$

ونرى استنادا الى المبرهنة ١٨٣ أن A_2 و A_1 متباينان وغامران وايزومتريان نظرا لان $\|A_1 f\| = \|x_0\| = \|f\|$ ، ولوجود علاقة مماثلة لـ A_2 . كذلك فان المؤثرين A_2 و A_1 مترافقان خطيا (راجع البند ١٣) . فعلا فاذا كتبنا



الشكل (٤٢) . المؤثرات في الدستورين (13) و (17)

فان $f_1(x) = \langle x, x_1 \rangle$ و $f_2(x) = \langle x, x_2 \rangle$ ، فاننا نجد أنه أيا كان x وأيا كان العددين α, β ،

$$\begin{aligned} (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \\ &= \alpha \langle x, x_1 \rangle + \beta \langle x, x_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha x_1 + \beta x_2 \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

أن هذا يبين استنادا الى تعريف A_1 الترافق الخطي

$$A_1(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A_1 f_1 + \beta A_1 f_2.$$

وفي حالة A_2 ، فاننا نجد برهانا مماثلا .

ونجد بالتركيب المؤثر (انظر الى الشكل ٤٢)

$$T^* y_0 = x_0 \quad \text{المعرف بالقاعدة} \quad T^* = A_1 T^x A_2^{-1}: H_2 \longrightarrow H_1 \quad (17)$$

إن T^* خطي ذلك أنه يحوي على تطبيقين اثنين مترافقين خطيا ، بالإضافة الى المؤثر الخطي T^x . سنثبت أن T^* هو حقا مؤثر هلبيرت المرافق لـ T . ان هذا أمر سهل ، ذلك أننا نستنتج مباشرة من (14) أو (16) أن

$$\langle Tx, y_0 \rangle = g(Tx) = f(x) = \langle x, x_0 \rangle = \langle x, T^* y_0 \rangle,$$

وهذا ليس الا (1) من البند ٣-٩ باستثناء الرموز . وهكذا فاننا نجد النتيجة التالية :

ان المستور (17) يمثل مؤثر هلبيرت المرافق T^* لمؤثر خطي T على فضاء هلبيرت بدلالة المؤثر المرافق T^x لـ T .

لاحظ كذلك بأن المساواة $\|T^*\| = \|T\|$ (المبرهنة ٣-٩-٢) تستنتج رأسا

من (5) ومن ايزومتريّة A_1 و A_2 . ■

لاكمال هذه المناقشة ، علينا أيضا ادراج بعض الفروق الرئيسية بين المؤثر

المرافق T^* للمؤثر $T: X \rightarrow Y$ ومؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر $T: H_1 \rightarrow H_2$ ،
حيث X و Y فضاءان منظمان ، وحيث H_1 و H_2 فضاءا هلبرت .

ان T^* معرف على الفضاء الثنوي للفضاء الحاوي لمدى T ، في حين أن T^* معرف رأسا على الفضاء الحاوي لمدى T . وقد مكنتنا هذه الخاصة لـ T^* من تعريف صنوف هامة من المؤثرات باستعمال مؤثرات هلبرت المرافقة لها (راجع ٣-١٠-١) .

واستنادا الى (10) فاننا نجد لـ T^* الخاصة التالية

$$(\alpha T)^* = \alpha T^*$$

في حين أننا نجد لـ T^* استنادا الى ٣-٩-٤ أن

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*.$$

يمثل T^* في الفضاءات منتهية البعد بمنقول المصفوفة المثلثة لـ T ، في حين أن T^* يمثل بالمرافق العقدي لمنقول تلك المصفوفة (لمزيد من التفصيل : راجع ٤-٥-٣ و ٣-١٠-٢) .

مسائل

- ١ - بين بأن الدالي المعروف بـ (1) خطي .
- ٢ - ما هما مرافقا المؤثر الصفري ٥ والمؤثر المطابق I ؟
- ٣ - أثبت صحة (9) .
- ٤ - أثبت صحة (10) .
- ٥ - أثبت صحة (11) .

٦ - بين بأن $(T^*)^* = (T^{**})^*$.

٧ - ما هي صيغ المصفوفات التي نحصل عليها بدمج (11) مع المثال ٤-٣-٣؟

٨ - أثبت صحة (12) .

٩ - (الضام) ليكن X و Y فضاءين منظمين و $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا، ولنفترض أن $M = \overline{\mathcal{R}(T)}$ لصاقة مدى T . أثبت أن (راجع المسألة ١٣ من البند ٢-١٠)

$$M^* = \mathcal{N}(T^*).$$

١٠ - (الضام) لتكن B مجموعة جزئية من الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X . يعرف الضام $B \perp B^*$ بأنه

$$B^* = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ for all } f \in B\}.$$

بين أنه في المسألة ٩ يكون

$$\mathcal{R}(T) \subset B^*(T^*).$$

ماذا يعني هذا بالنسبة لعملية حل المعادلة $Tx = y$ ؟

٦-٤ الفضاءات الانعكاسية

لقد سبق وبحثنا في الانعكاسية الجبرية للفضاءات المتجهية في البند ٢-٨، أما انعكاسية الفضاءات المنظمة فسيكون موضوع بحثنا في هذا البند . لكننا أولا سنعيد الى الذاكرة ما فعلناه في البند ٢-٨ . نذكر بأنه يقال عن فضاء متجهي X انه انعكاسي جبريا اذا كان التطبيق القانوني غامرا . ان $X^{**} = (X^*)^*$ هنا هو الفضاء الثنوي الجبري الثاني لـ X ، وحيث نعرف التطبيق C بأنه $x \mapsto g_x$ بفرض أن

$$(1) \quad g_x(f) = f(x)$$

بمعنى أن صورة أي عنصر x من X هو دالي خطي g_x معرف بالمساواة (1) . وإذا كان X منتهي البعد ، فإن X انعكاسي جبريا ، وهذا أمر أثبتناه في المبرهنة ٢-٩-٣ .

لنتقل الآن إلى مهمتنا الأصلية . لنأخذ فضاء منظما X وفضاء الثنوي X' . كما عرفناه في ٢-١٠-٣ ، وأيضا الفضاء الثنوي $(X')'$ للفضاء X' . يرمز لهذا الفضاء بـ X'' ، ويطلق عليه اسم الفضاء الثنوي الثاني لـ X .

سنعرف داليا g_x على X' باختيار عنصر مثبت x من X وكتابة أن

$$(2) \quad g_x(f) = f(x) \quad f \in X'$$

ان هذه المساواة تشبه (1) ، إلا أنه تجدر بنا الإشارة إلى أن f هنا محدود . كذلك فقد تبين أن g_x محدود أيضا ، الامر الذي يبينه التمهيدية الاساسية التالية :

١-٦-٤ تمهيدية (نظيم g_x)

إذا كان x عنصرا مثبتا في فضاء منظم X ، فإن الدالي g_x المعرف بـ (2) هو دالي خطي محدود على X' ، كما ان لهذا الدالي g_x المنتمي إلى X'' التنظيم

$$(3) \quad \|g_x\| = \|x\|.$$

البرهان :

ان خطية g_x سبق ووجدناها في البند ٢-٨-٠ أما (3) فتتبع من (2) ومن النتيجة ٤-٣-٤ :

$$(4) \quad \|g_x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|.$$

يقابل كل x من X دالي خطي محدود وحيد $g_x \in X''$ محدد بالمساواة (2) . ان هذا يحدد تطبيقا هو التالي

$$C: X \longrightarrow X''$$

(5)

$$x \longmapsto g_x.$$

يسمى C التطبيق القانوني لـ X في X'' • سنبين أن C خطي ومتباين ويحفظ النظام ، وهذا أمر يعبر عنه بدلالة ايزومورفيزم فضاءين منظمين كما سبق وذكرنا في البند ١٠-٢ :

٢-٦-٤ تمهيدية (التطبيق القانوني)

التطبيق القانوني C المعروف بـ (5) هو ايزومورفيزم للفضاء المنظم X على الفضاء المنظم $\mathcal{R}(C)$ ($\mathcal{R}(C)$ هو مدى C) •

البرهان :

ان خطية C تستنتج من البند ٨-٢ ذلك أن

$$g_{\alpha x + \beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha g_x(f) + \beta g_y(f).$$

وبوجه خاص ، فان $g_x - g_y = g_{x-y}$ • لذا فاننا نجد استنادا الى (3) أن

$$\|g_x - g_y\| = \|g_{x-y}\| = \|x - y\|.$$

وهذا يبين أن C ايزومتري ، اذن فهو يحفظ النظام • ان الايزومتريية تقتضي التباين • الامر الذي يمكن رؤيته مباشرة من دستورنا • وفي الحقيقة ، فاذا كان $x \neq y$ ، فان $g_x \neq g_y$ وفق الموضوعه (ن٢) من البند ٢-٢ • لذا فان C متباين وغامر باعتباره تطبيقا على مداه • ■

يقال عن X انه طموور في فضاء منظم Z اذا كان X ايزومورفيا مع فضاء جزئي من Z • ان هذا مماثل لما أوردناه في البند ٨-٢ ، الا أنه يجدر بنا ملاحظة أننا نتعامل هنا مع ايزومورفيزمات لفضاءات منظمة ، أي مع

ايزومورفزمات لفضاءات متجهية تحفظ التنظيم (راجع البند ٢-١٥) • تبين
 التمهيدية ٤-٦-٢ أن X طمور في X'' ، ويدعى C الطمر القانوني لـ X في X'' •
 إن C ليس عامرا في الحالة العامة ، وبالتالي فان المدى $\mathcal{R}(C)$ هو فضاء
 جزئي تماما من X'' • ان الحالة التي يكون فيها $\mathcal{R}(C)$ مساويا لـ X'' بأكمله هامة
 لدرجة تستدعي اعطاءها اسما كما يلي :

٤-٦-٢ تعريف (الانعكاسية)

نقول عن فضاء منظم X انه انعكاسي اذا كان

$$\mathcal{R}(C) = X''$$

حيث $X \rightarrow X'' : C$ هو التطبيق القانوني المعرف بـ (5) و (2) •

لقد قدم هذا المفهوم هان عام ١٩٢٧ م • ، أما اسم «الانعكاسية» فقد أطلقه
 لورث عام ١٩٣٩ م • لقد أدرك هان أهمية الانعكاسية خلال دراسته للمعادلات
 الخطية في الفضاءات المنظمة ، تلك الدراسة التي أدى إليها موضوع
 المعادلات التكاملية •

اذا كان X انعكاسيا ، فانه ايزومورفي (وبالتالي ايزومتري) مع X''
 استنادا الى التمهيدية ٤-٦-٢ • ومن المهم معرفة أن العكس ليس صحيحا في
 الحالة العامة ، كما بين جيمس في عامي ١٩٥٠ م و ١٩٥١ م •
 كذلك ، فان التمام لا يقتضي الانعكاسية ، الا أننا نجد أن العكس صحيح
 كما تبين المبرهنة التالية :

٤-٦-٣ مبرهنة (التمام)

اذا كان الفضاء المنظم X انعكاسيا ، فانه تام (وبالتالي فضاء باناخ) •

البرهان :

بما أن X'' هو الفضاء الثنوي لـ X' ، فانه تام وفق المبرهنة ٢-١٠-٤ • ان

انعكاسية X تعني أن $\mathcal{R}(C) = X''$. وبالتالي فإن تمام X ينتج من كون X'' تاما
استنادا الى التمهيدية ٤-٦-٢ . ■

الفضاء \mathbb{R}^n انعكاسي ، وهذا ناتج مباشرة عن ٢-١٠-٥ . والانعكاسية
صفة يتمتع بها كل فضاء منظم منتهي البعد X . وفعلا ، فإذا كان $\dim X < \infty$ ، فإن
كل دالي خطي على X محدود (راجع ٢-٧-٨) وبالتالي فإن $X' = X^*$. وهكذا
فإن الانعكاسية الجبرية لـ X (راجع ٢-٩-٣) تقتضي ما يلي :

٤-٦-٥ مبرهنة (البعد المنتهي)

كل فضاء منظم منتهي البعد انعكاسي .

إن l^p ، حيث $1 < p < +\infty$ ، فضاء انعكاسي ، وهذا ناتج من ٢-١٠-٧ .
كذلك ، فإن $L^p[a, b]$ ، حيث $1 < p < +\infty$ ، انعكاسي ، وهو أمر يمكن اثباته .
ويمكن أيضا الاثبات بأن الفضاءات التالية غير انعكاسية : الفضاء $C[a, b]$
(راجع ٢-٢-٥) ، والفضاء l^1 (سنورد البرهان بعد قليل) ، والفضاء $L^1[a, b]$
(راجع ٢-٢-٤) ، والفضاءان الجزئيان c و c_0 من l^∞ ، حيث c هو فضاء
كل المتتاليات المتقاربة من الاعداد و c_0 هو فضاء كل المتتاليات العددية المتقاربة
من الصفر .

٤-٦-٦ مبرهنة (فضاء هلبرت)

كل فضاء H لهلبرت انعكاسي

البرهان :

سنثبت أن التطبيق القانوني $C: H \rightarrow H''$ غامر وذلك بتبيان أنه يوجد لكل
 g من H'' عنصر x من H بحيث يكون $g = Cx$. لهذا الغرض سنعرف
 $A: H' \rightarrow H'$ بالدستور $Af = z$ ، حيث z معطى بتمثيل ريس $f(x) = \langle x, z \rangle$
الوارد في ٣-١-١ . نحن نعلم من ٣-١-١ أن A متباين وايزومتري . كذلك
فإن A خطي مرافق كما نرى من (١٦) من البند ٤-٥ . إن H' تام استنادا الى

٢-١٠-٤ وهو فضاء لهبرت مزود بالجاء الداخلي المعروف كالتالي :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_1 = \langle Af_2, Af_1 \rangle.$$

لاحظ الترتيب الذي يرد وفقه f_1 و f_2 في كلا الطرفين • من الممكن التحقق ببساطة من (جد ١) - (ج ٤) الواردة في البند ٣-١ • وبوجه خاص ، فإن (جد ٢) ناتج من كون A خطيا مرافقا :

$$\langle \alpha f_1, f_2 \rangle_1 = \langle Af_2, A(\alpha f_1) \rangle = \langle Af_2, \bar{\alpha} Af_1 \rangle = \alpha \langle f_1, f_2 \rangle_1.$$

ليكن $g \in H''$ اختياريا ، ولنفترض أن تمثيل ريس له هو

$$g(f) = \langle f, f_0 \rangle_1 = \langle Af_0, Af \rangle.$$

نحن نذكر الآن بأن $f(x) = \langle x, z \rangle$ ، حيث $z = Af$ • وإذا كتبنا $Af_0 = x$ ، نجد أن

$$\langle Af_0, Af \rangle = \langle x, z \rangle = f(x).$$

لذا فانتا نجد أن $g(f) = f(x)$ ، أي أن $g = Cx$ استنادا الى تعريف C • ولما كان $g \in H''$ اختياريا ، فإن C غامر ، وبالتالي فإن H انعكاسي ■

ان الفصولية أو عدم الفصولية أمر يمكنه أحيانا أن يلعب دورا ما في البرهان على أن فضاء ما ليس انعكاسيا • وهذه الصلة بين الانعكاسية والفصولية طريفة وجد بسيطة ، وتمثل المبرهنة ٤-٦-٨ (التي سنوردها الآن) أهم مبرهنة في هذا الصدد ، وهي تنص على أن كون X' فصولا يقتضي أن يكون X كذلك (أما العكس فغير صحيح بعامة) • لذا فاذا كان فضاء منظم X انعكاسيا ، فإن X'' ايزومورفي مع X استنادا الى ٤-٦-٢ ، بحيث أن فصولية X في هذه الحالة تقتضي فصولية X'' ، وبالتالي فإن ٤-٦-٨ تقتضي أن يكون الفضاء X' فصولا كذلك ، نستنتج من هذا النتيجة التالية :

لا يمكن أن ان يكون الفضاء المنظم الفصول X الذي فضاؤه الشوي X' غير فصول انعكاسيا •

مثال :

الفضاء l^1 غير انعكاسي .

البرهان :

الفضاء l^2 فصول استنادا الى ١٠-٣-١ ، في حين أن $l^1 = l^2$ ليس كذلك .
راجع ١٠-٢-٦ و ٩-٣-١ .

ان المبرهنة المنشودة ٨-٦-٤ يمكن ايجادها من التمهيدية التالية . ويقدم الشكل (٤٣) ايضاها بسيطا للتمهيدية .

٧-٦-٤ تمهيدية (وجود الدالي)

ليكن Y فضاء جزئيا تماما ومغلقا في فضاء منظم X . ليكن العنصر $x_0 \in X - Y$ اختياريا ، ولتكن

$$(6) \quad \delta = \inf_{y \in Y} \|\bar{y} - x_0\|$$

المسافة بين x_0 و Y ، عندئذ يوجد $\bar{f} \in X'$ بحيث أن

$$(7) \quad \|\bar{f}\| = 1, \quad \bar{f}(y) = 0 \text{ أيا كان } y \in Y, \quad \bar{f}(x_0) = \delta.$$

البرهان :

إن فكرة البرهان بسيطة . لتأخذ الفضاء الجزئي Z من X المولد بـ Y و x_0 ، ولنعرف على Z الدالي الخطي المحدود f على النحو

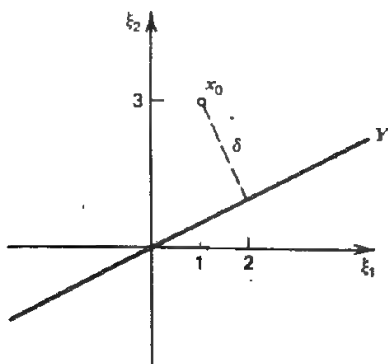
$$(8) \quad f(z) = f(y + \alpha x_0) = \alpha \delta \quad y \in Y,$$

سنين أن f يحقق (7) وسنمدد f الى X وفق ٢-٣-٤ . أما التفاصيل فهي كما يلي :

يوجد لكل z من $Z = \text{span}(Y \cup \{x_0\})$ التمثيل الوحيد

$$z = y + \alpha x_0 \quad y \in Y.$$

وهذا مستعمل في (8) • ان خطية f واضحة للعيان • كذلك لما كان مغلقا ،
 فان $\delta > 0$ ، وبالتالي فان $f \neq 0$ • اذا افترضنا أن $\alpha = 0$ ، فان $f(y) = 0$ أي
 كان y من Y • واذا افترضنا أن $\alpha = 1$ و $y = 0$ ، فاننا نجد $f(x_0) = \delta$



الشكل (٣) • ايضاح التمهيدية ٦-٦-٧ في حالة الفضاء الاقليدي $X = \mathbb{R}^3$ ،
 حيث Y ممثل بـ $\xi_2 = \xi_1/2$ ، $\xi_3 = 0$ و $x_0 = (1, 3, 0)$ ، وبالتالي يكون $\delta = \sqrt{5}$ ،
 $Z = \text{span}(Y \cup \{x_0\})$ ، $f(z) = (-\xi_1 + 2\xi_2)/\sqrt{5}$ هو المستوي

سنبين أن f محدود • اذا كان $\alpha = 0$ فان $f(z) = 0$ • لنفترض أن $\alpha \neq 0$ •
 عندئذ نجد استنادا الى (6) وبملاحظة أن $(1/\alpha)y \in Y$ ما يلي :

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\alpha| \delta = |\alpha| \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \\ &\leq |\alpha| \left\| -\frac{1}{\alpha} y - x_0 \right\| \\ &= \|y + \alpha x_0\|, \end{aligned}$$

أي أن $\|f(z)\| \leq \|z\|$ • لذا فان f محدود و $\|f\| \leq 1$ •
 سنبين أن $\|f\| \geq 1$ • يحوي Y وفق تعريف الحد الأدنى متتالية (y_n) بحيث

أن $\delta \rightarrow \|y_n - x_0\|$ • لنفترض أن $z_n = y_n - x_0$ • عندئذ نجد اعتمادا على (8) أن $f(z_n) = -\delta$ ، حيث $\alpha = -1$ • كذلك فإن

$$\|f\| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta} = 1$$

عندما $n \rightarrow \infty$ • لذا فإن $\|f\| \geq 1$ ، وبالتالي فإن $\|f\| = 1$ • واستنادا الى مبرهنة هان - باناخ ٤-٣-٢ المتعلقة بالفضاءات المنظمة ، فيمكن تمديد f الى X دون زيادة التنظيم ■ •

وبالاستعانة بهذه التمهيدية ، يغدو من الممكن الآن اثبات المبرهنة المنشودة التالية :

٨-٦-٤ مبرهنة (الفصولية)

إذا كان الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X فصولا ، فإن X نفسه فصول •

البرهان :

ليكن X' فصولا • عندئذ تحوي الكرة الواحدة $U' = \{f \mid \|f\| = 1\} \subset X'$ مجموعة جزئية كثيفة وعدودة أيضا ، ولتكن (f_n) • وبما أن $f_n \in U'$ ، فانتا نجد أن

$$\|f_n\| = \sup_{|x|=1} |f_n(x)| = 1.$$

واستنادا الى تعريف الحد الاعلى ، فمن الممكن العثور على نقاط x_n من X نظيمها 1 بحيث أن

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}.$$

لتكن Y لصاقة المجموعة $\text{span}(x_n)$ • عندئذ يكون Y فصولا لان Y يحوي

مجموعة جزئية كثيفة وعدودة ، ونعني بها مجموعة كل التراكيب الخطية للحدود x_n بمعاملات أقسامها الحقيقية والتخيلية أعداد عادية .

سنبين أن $Y = X$. لنفترض مؤقتا أن $Y \neq X$. عندئذ نجد استنادا الى التمهيدية ٤-٦-٧ نظرا لكون Y مغلقا أنه يوجد \bar{f} من X' يحقق المساواة $\|\bar{f}\| = 1$ ، والشرط $\bar{f}(y) = 0$ أيا كان y من Y . وبما أن $x_n \in Y$ ، فاننا نجد أن $\bar{f}(x_n) = 0$ ، وأنه لدينا أيا كان n

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - \bar{f}(x_n)| \\ &= |(f_n - \bar{f})(x_n)| \\ &\leq \|f_n - \bar{f}\| \|x_n\|, \end{aligned}$$

حيث $\|x_n\| = 1$. لذا فإن $\|f_n - \bar{f}\| \geq \frac{1}{2}$. لكن هذا مناقض للفرض القائل بأن (f_n) كثيفة في U' لان \bar{f} نفسه في U' ، وفعلا فإن $\|\bar{f}\| = 1$. ■

مسائل

- ١ - عين الداليين f و g في (2) اذا كان $X = \mathbb{R}^n$.
- ٢ - قدم برهانا أبسط على التمهيدية ٤-٦-٧ للحالة التي يكون فيها X فضاء هلبرت .
- ٣ - اذا كان فضاء منظم X انعكاسيا ، فبين بأن X' انعكاسي .
- ٤ - بين بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء باناخ X انعكاسيا ، هو أن يكون فضاءه الثنوي X' انعكاسيا . (ملاحظة : من الممكن اثبات أن كل فضاء جزئي مغلق من فضاء باناخ الانعكاسي انعكاسي أيضا . أفد من هذه الدعوى دون اثباتها) .
- ٥ - أثبت انطلاقا من افتراضات التمهيدية ٤-٦-٧ ، أنه يوجد دالي خطي

محدود h على X بحيث يكون $\|h\|=1/\delta$ و $h(y)=0$ أيًا كان y من Y و
 $h(x_0)=1$

٦ - بين أنه يوجد لاي فضاءين جزئيين مغلقين ومختلفين Y_1 و Y_2 من فضاء منظم X عادمان مختلفان (راجع المسألة ١٣ من البند ٢-١٠) .

٧ - ليكن Y فضاء جزئياً مغلقاً في فضاء منظم X بحيث يكون كل f من X' مساو للصفر حيثما كان على Y صفرية حيثما كان على الفضاء X بأكمله .
 • برهن أن $Y=X$

٨ - لتكن M أي مجموعة جزئية من فضاء منظم X . برهن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_0 \in X$ عنصراً من $A = \overline{\text{span } M}$ هو أن يكون $f(x_0)=0$ أيًا كان f من X' الذي يحقق الشرط $f|_M=0$

٩ - (المجموعة الكلية) • بين بأن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M في فضاء منظم كلية في X هو التالي : أيًا كان $f \in X'$ الذي يساوي الصفر حيثما كان على M ، فإن f يساوي الصفر حيثما كان على X .

١٠ - بين أنه إذا وجد لفضاء منظم X مجموعة جزئية مستقلة خطياً مؤلفة من n من العناصر، فإن الفضاء الثنوي X' يكون كذلك .

٧-٤ مبرهنة الفئة • مبرهنة المحدودية المنتظمة

إن مبرهنة المحدودية المنتظمة (أو مبدأ المحدودية المنتظمة) التي تعود لباناخ وشتاينهاوس (١٩٢٧ م) ذات أهمية بالغة . وفعلًا فإن كثيرا من الامثلة والنتائج التي ترد في التحليل الرياضي ترتبط بهذه المبرهنة ، أولها بحثه لوبيغ (١٩٠٩ م) . وغالبا ما تعتبر مبرهنة المحدودية المنتظمة واحدة من الاركان الاساسية التي يستند اليها التحليل الدالي في الفضاءات المنتظمة ، أما الاركان الاخرى فهي مبرهنة هان - باناخ (البندان ٤-٣ و ٤-٣) ، ومبرهنة التطبيق المفتوح (البند ٤-١٢) ، ومبرهنة البيان المغلق (البند ٤-١٣) . وخلافا

لمبرهنه هان - باناخ ، فإن المبرهنات الثلاث الاخرى من هذه المبرهنات الاربع تتطلب شرط التمام . وفعلًا ، فإنها تجسد بعضًا من أهم خواص فضاءات باناخ التي قد لا تتمتع بها الفضاءات المنتظمة في الحالة العامة .

ومن الاهمية بمكان ملاحظة أننا سنتوصل الى المبرهنات الثلاث جميعا من منطلق واحد . وبعبارة أدق ، فإننا سنثبت ما يسمى مبرهنه بير في الفئات ، ومن ثم نشق منها مبرهنه المحدودية المنتظمة (في هذا البند) ، وأيضا مبرهنه التطبيق المفتوح (في البند ٤-١٢) . أما مبرهنه البيان المغلق (في البند ٤-١٣) فتستتج انطلاقا من المبرهنه الاخيرة .

ويوجد لمبرهنه بير في الفئات تطبيقات أخرى في التحليل الدالي ، وهي السبب الاساسي في دخول الفئة في براهين عديدة ، راجع مثلا الكتاين التاليين :

Edwards, R. E. (1965), *Functional Analysis*. New York: Holt, Rinehart and Winston

Kelley, J. L., and I. Namioka (1963), *Linear Topological Spaces*. New York: Van Nostrand

سندرج في التعريف ٤-٧-١ المفاهيم اللازمة لمبرهنه بير ٤-٧-٢ . ولكل من هذه المفاهيم اسم حديث وآخر قديم نورده بين قوسين . والاسم القديم في طريقه الى الزوال ، ذلك أن كلمة «فئة» تستعمل الآن لغرض رياضي مختلف تماما (لن يرد في هذا الكتاب) .

٤-٧-١ تعريف (الفئة)

يقال عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها

(٢) نادرة (او غير كثيفة في أي مكان) في X اذا لم تحنو لصاقتها \bar{M} نقاطا داخلية (راجع البند ١-٣) ،

(ب) هزيلة (او من الفئة الاولى) في X اذا كانت M اجتماعا عدودا لجماعة من المجموعات كل منها نادر في X .

(ج) غير هزيلة (او من الفئة الثانية) في X اذا لم تكن M هزيلة في X .

٢-٧-٤ مبرهنة بير في الفئات (الفضاءات المترية التامة)

اذا كان الفضاء المترى غير الخالي X تاما ، فانه هزيل في نفسه .

لذا فاذا كان X غير الخالي تاما وكان

$$(I) \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{مغلقة } A_k$$

فان واحدة على الاقل من المجموعات A_k تحوي مجموعة جزئية مفتوحة وغير خالية .

البرهان :

ان فكرة البرهان سهلة . لنفترض أن الفضاء المترى التام غير الخالي X هزيل في نفسه . عندئذ يكون

$$(1^*) \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

حيث M_k نادرة في X . سننشئ متتالية كوشي (p_k) بحيث تكون نهايتها p (التي نحكم بوجودها بسبب التمام) غير موجودة في أي من المجموعات M_k . وهذا يناقض التمثيل (1^*) .

ان M_1 نادرة في X فرضا ، وبالتالي فان \bar{M}_1 تعريفا لا تحوي مجموعة مفتوحة غير خالية ، في حين أن X تحوي مثل هذه المجموعة (المجموعة X نفسها مثلا) . وهذا يقتضي أن يكون $\bar{M}_1 \neq X$. لذا فان المتمة $\bar{M}_1^c = X - \bar{M}_1$ ليست خالية ومفتوحة . وبالتالي فيمكن اختيار نقطة p_1 في \bar{M}_1^c وكرة مفتوحة حولها ، ولتكن مثلا

$$B_1 = B(p_1; \varepsilon_1) \subset \bar{M}_1^c \quad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$$

ان M_2 هي فرضا نادرة في X ، وبالتالي فان \bar{M}_2 لا تحوي مجموعة مفتوحة غير خالية . لذا ، فانها لا تحوي الكرة المفتوحة $B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1)$. وهذا يقتضي أن

تكون المجموعة $\bar{M}_2^c \cap B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1)$ ليست خالية ومفتوحة ، وبالتالي فيمكن اختيار كرة مفتوحة في هذه المجموعة ، ولتكن مثلا

$$B_2 = B(p_2; \varepsilon_2) \subset \bar{M}_2^c \cap B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1) \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1.$$

واستنادا الى طريقة الاستقراء الرياضي ، فاننا نجد متتالية من الكرات

$$B_k = B(p_k; \varepsilon_k) \quad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

بحيث أن $B_k \cap M_k = \emptyset$ وأن

$$B_{k+1} \subset B(p_k; \frac{1}{2}\varepsilon_k) \subset B_k \quad k = 1, 2, \dots$$

ولما كان $\varepsilon_k < 2^{-k}$ ، فإن متتالية المراكز (p_k) هي متتالية كوشي ، وبالتالي فانها تتقارب من عنصر وليكن p مثلا في X ، ذلك لكون X تاما فرضا . كذلك ، فانه اذا كان m عددا ما و n عددا آخر بحيث يكون $n > m$ ، فإن $B_n \subset B(p_m; \frac{1}{2}\varepsilon_m)$ ، وبالتالي فان

$$\begin{aligned} d(p_m, p) &\leq d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon_m + d(p_n, p) \longrightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_m \end{aligned}$$

عندما $n \rightarrow \infty$. لذا فان $p \in B_m$ أيا كان m . ولما كان $B_m \subset \bar{M}_m^c$ ، فاننا نرى أن $p \notin M_m$: أيا كان m ، واذن نجد أن $p \notin \bigcup M_m = X$ ، وهذا يناقض كون $p \in X$ وبذا يكتمل إثبات مبرهنة بير . ■

وتجدر بنا الإشارة الى أن عكس مبرهنة بير ليس صحيحا بعامه . وقد ورد مثال على فضاء منظم غير تام دون أن يكون هزليا في نفسه . وهذا المثال وارد في الصفحتين ٣ و ٤ من كتاب :

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. III à V. Paris: Hermann

سنشتق الآن من مبرهنة بير مباشرة مبرهنة المحدودية المنتظمة المنشودة .

وتنص هذه البرهنة على أنه إذا كان X فضاء باناخ ، وأنه إذا كانت متتالية من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ محدودة في كل نقطة x من X ، فإن هذه المتتالية محدودة بانتظام . وبعبارة أخرى ، فإن المحدودية النقطية تقتضي محدودية بمفهوم أقوى ، ألا وهي المحدودية المنتظمة . (ان العدد الحقيقي c_x في المتباينة (2) الواردة بعد قليل ، سيتغير في الحالة العامة مع x ، ونعبر عن هذا بوضع الدليل في أسفل x ، والمهم في الامر هو أن c_x غير تابعة لـ n) .

٣-٧-٤ مبرهنة المحدودية المنتظمة

• لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة $T_n: X \rightarrow Y$ من فضاء باناخ X الى الفضاء النظم Y بحيث تكون المتتالية $(\|T_n x\|)$ محدودة ايا كان x من X ، كان يكون مثلاً

$$(2) \quad \|T_n x\| \leq c_x \quad n = 1, 2, \dots,$$

حيث c_x عدد حقيقي . عندئذ تكون متتالية النظم $\|T_n\|$ محدودة ، بمعنى أنه يوجد عدد c بحيث يكون

$$(3) \quad \|T_n\| \leq c \quad n = 1, 2, \dots.$$

البرهان :

لنقابل كل عدد k من N بالمجموعة $A_k \subset X$ المؤلفة كل من العناصر x المحققة للمتباينة

$$\|T_n x\| \leq k \quad \text{أيا كان } n$$

ان A_k مغلقة ، ذلك أنه إذا كان x عنصراً ما من \bar{A}_k ، فثمة متتالية (x_i) في A_k تتقارب من x . وهذا يعني أنه يقابل كل عدد مثبت n المتباينة $\|T_n x_i\| \leq k$ ، ونحصل بالتالي على المتباينة $\|T_n x\| \leq k$ ، ذلك أن T_n مستمر ، وكذلك النظم (راجع البند ٢-٢) . لذا فإن $x \in A_k$ ، وبالتالي فإن A_k مغلقة .

نلاحظ من (2) أن كل x من X ينتمي الى مجموعة ما A_k وبالتالي فإن

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

وبما أن X تام ، فانه يترتب على مبرهنة بير أن احدى المجموعات A_k تحوي كرة مفتوحة ، كأن يكون مثلاً

$$(4) \quad B_0 = B(x_0; r) \subset A_{k_0}.$$

ليكن x عنصراً اختيارياً غير صفري من X • لنضع

$$(5) \quad z = x_0 + \gamma x \quad \gamma = \frac{r}{2\|x\|}.$$

عندئذ يكون $\|z - x_0\| < r$ ، وبالتالي فإن $z \in B_0$ • وهكذا فائنا نجد انطلاقاً من (4) ومن تعريف A_{k_0} أن $\|T_n z\| \leq k_0$ أيأ كان n • كذلك ، فإن $\|T_n x_0\| \leq k_0$ نظراً لكون $x_0 \in B_0$ • ونجد من (5) أن

$$x = \frac{1}{\gamma} (z - x_0).$$

وبالتالي فائنا نجد أيأ كان n ما يلي :

$$\|T_n x\| = \frac{1}{\gamma} \|T_n (z - x_0)\| \leq \frac{1}{\gamma} (\|T_n z\| + \|T_n x_0\|) \leq \frac{4}{r} \|x\| k_0.$$

يترتب على هذا أنه أيأ كان n فإن

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leq \frac{4}{r} k_0.$$

وهذا ليس سوى (3) بعد تمويض $c = 4k_0/r$ •

تطبيقات

٤-٧-٤ فضاء الحدوديات

أن الفضاء المنظم X لكل الحدوديات المزودة بالنظيم المعروف بـ

$$(6) \quad \|x\| = \max_i |\alpha_i| \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots \text{ هي معاملات } x)$$

ليس تاما .

البرهان :

لنشكل متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة على X تحقق (2) دون (3) ،
وبالتالي فان X لا يمكن أن يكون تاما .

يمكننا كتابة حدودي $x \neq 0$ درجته N_x بالصيغة

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j \quad (\alpha_j = 0 \text{ عندما } j > N_x).$$

(في الحالة $x = 0$ ، فان الدرجة لا تتحدد بالتعريف العادي للدرجة ، الا أن هذا أمر ليس بذي بال هنا) . وسنأخذ كمتتالية للمؤثرات على X متتالية الداليات $T_n = f_n$ المعرفة كما يلي :

$$(7) \quad T_n 0 = f_n(0) = 0, \quad T_n x = f_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}.$$

إن f_n خطي . كذلك فان f_n محدود ذلك أن $|\alpha_j| \leq \|x\|$ وفق (6) ، وبالتالي فان $|f_n(x)| \leq n \|x\|$. فضلا عن ذلك ، فان المتتالية $(f_n(x))$ تحقق (2) أيا كان العنصر المثبت x في X ، ذلك أنه يوجد في الحدودي x الذي درجته N_x معاملات عددها $N_x + 1$ ، وبالتالي فاننا نجد استنادا الى (7) أن

$$|f_n(x)| \leq (N_x + 1) \max_j |\alpha_j| = c_x$$

وهي من الصيغة (2) .

سنبين الآن (f_n) لا تحقق (3) ، أي أنه لا يوجد c بحيث يكون $\|T_n\| = \|f_n\| \leq c$ أبا كان n . ان هذا أمر نقوم به باختيار حدوديات غير مؤاتية .
ونختار لـ f_n الحدودي x المعروف كالتالي

$$x(t) = 1 + t + \dots + t^n.$$

عندئذ يكون $\|x\| = 1$ وفق (6) ونجد أن

$$f_n(x) = 1 + 1 + \dots + 1 = n = n \|x\|.$$

لذا فان $\|f_n\| \geq \|f_n(x)\|/\|x\| = n$ ، وبالتالي فان $\|f_n\|$ غير محدودة .

٥-٧-٤ متسلسلات فورييه

من المعلوم ، كما سبق ورأينا في ٣-٥-١ ، أن متسلسلة فورييه لدالة دورية معطاة x دورها 2π هي من الشكل

$$(8) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt)$$

وأن معاملات فورييه لـ x تعطى بدستوري أولر التاليين

$$(9) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos mt \, dt, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin mt \, dt.$$

[كتبنا $a_0/2$ في (8) كي نجد دستورين فقط في (9) ، في حين أنه عندما كتبنا في ٣-٥-١ ، فاننا احتجنا الى ثلاثة دساتير] .

من المعلوم أن المتسلسلة (8) قد تتقارب حتى في نقاط تكون فيها x غير مستمرة (راجع المسألة ١٥ التي تمدنا بمثال بسيط عن هذا) . وهذا يبين أن الاستمرار ليس شرطاً لازماً للتقارب . ومن المدهش هنا أن يكون شرط الاستمرار غير كاف كذلك (*) . وفي الحقيقة ، فانه اذا استخدمنا مبرهنة المحدودية المنتظمة فانه يمكن اثبات ما يلي :

ثمة دوال حقيقية مستمرة بحيث ان متسلسلات فورييه لهذه الدوال تتباعد

في نقطة معطاة t_0 .

البرهان :

ليكن x الفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة التي دورها

* إن شرط الاستمرار ووجود مشتق أيمن ومشتق أيسر في نقطة t_0 كاف للتقارب

في t_0 . راجع الصفحة ٧٠ من كتاب W. Rogosinski (١٩٥٩) .

2π ، حيث يعرف النظيم بالمساواة

$$\|x\| = \max |x(t)|. \quad (10)$$

ان X هو فضاء باناخ استنادا الى $a=0$ و $b=2\pi$ من الممكن أخذ $t_0=0$ دون مس العسومية . لاثبت دعوانا ، سنطبق مبرهنة المحدودية المنتظمة ٤-٧-٣ على $T_n=f_n$ ، حيث $f_n(x)$ هو القيمة في $t=0$ للمجموع الجزئي للحدود الاولى التي عددها n من متسلسلة فورييه لـ x . وبما أنه عندما $t=0$ تكون الحدود الجيبية صفرية وتكون حدود جيوب التمام واحدة ، فاننا نستنتج من (8) و (9) أن

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mt \right] dt. \end{aligned}$$

سنعين الدالة المثلثة بالمجموع الوارد تحت اشارة المكاملة . لهذا نحسب

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{2}t \sum_{m=1}^n \cos mt &= \sum_{m=1}^n 2 \sin \frac{1}{2}t \cos mt \\ &= \sum_{m=1}^n [-\sin (m - \frac{1}{2})t + \sin (m + \frac{1}{2})t] \\ &= -\sin \frac{1}{2}t + \sin (n + \frac{1}{2})t, \end{aligned}$$

حيث نجد العبارة الاخيرة بملاحظة أن أكثر الحدود تحذف أزواجا . وبالتقسيم على $\sin \frac{1}{2}t$ واطافة 1 الى الطرفين ، فاننا نجد أن

$$1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos mt = \frac{\sin (n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}.$$

وبالتالي ، فان الدستور الذي يعطي $f_n(x)$ يمكن أن يكتب بالصيغة البسيطة التالية

$$(11) \quad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt, \quad q_n(t) = \frac{\sin (n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}.$$

ويمكننا بالاستعانة بهذا أن نبين بأن الدالي الخطي f_n محدود • وفعلًا فإنه يترتب على (10) و (11) أن

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \max |x(t)| \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt = \frac{\|x\|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

ونرى من هنا أن f_n محدود • وفضلاً عن ذلك ، فإنه إذا أخذنا الـ \sup عندما تسمح x جميع العناصر التي نظمها 1 ، فإننا نجد أن

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

سنبين الآن أن الإشارة في هذه العلاقة هي إشارة التساوي • ولهذا نكتب

$$|q_n(t)| = y(t)q_n(t)$$

حيث $y(t) = +1$ في كل نقطة ، يكون فيها $q_n(t) \geq 0$ ، وحيث $y(t) = -1$ فيما عدا ذلك • ان y ليست مستمرة ، بيد أنه إذا كان ε عددا موجبا معطى ، فإنه يمكن ربطه بدالة مستمرة x نظمها 1 بحيث أنه من أجل x هذه يكون

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)] q_n(t) dt \right| < \varepsilon.$$

وبكتابة هذا على شكل مجموع تكاملين ، والاستعانة بـ (11) نجد أن

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt - \int_0^{2\pi} y(t) q_n(t) dt \right| = \left| f_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ اختياري وأن $\|x\| = 1$ ، فإننا نجد الدستور المنشود

$$(12) \quad \|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

سنين أخيرا أن المتتالية $\|f_n\|$ غير محدودة • فإذا عوضنا في (12) عبارة q_n من (11) ، وأفدنا من أن $|\sin \frac{1}{2}t| < \frac{1}{2}t$ عندما يكون $t \in (0, 2\pi]$ ، ووضعنا $(n + \frac{1}{2})t = v$ فاننا نجد ما يلي :

$$\begin{aligned}\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt \\ &> \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin v| dv \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \longrightarrow \infty \quad \text{عندما } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

لكون المتسلسلة التوافقية متباعدة • لذا فالمتتالية $\|f_n\|$ غير محدودة ، وبالتالي فان (3) (حيث $T_n = f_n$) غير صحيحة • وبما أن X تام ، فاننا نستنتج أن (2) لا يمكن أن تصح من أجل جميع العناصر x ، وبالتالي فلا بد من وجود x من X بحيث تكون $\|f_n(x)\|$ غير محدودة • وهذا يعني استنادا الى تعريف f_n أن متسلسلة فورييه للدالة x هذه متباعدة في النقطة $t=0$ ■ •

لاحظ أن برهانا للوجود هذا لا يثبتنا عن كيفية إيجاد مثل هذه الدالة المستمرة x بحيث تتباعد متسلسلة فورييه لـ x في نقطة $t=t_0$ • وقد أورد أمثلة على مثل هذه الدوال كل من فيجير Fejér (١٩١٠ م) وروغوزينسكي Rogosinski (١٩٥٩ م) •

مسائل

- ١ - ما هي فئة مجموعة كل الاعداد العادية (أ) في \mathbb{R} ، (ب) في نفسها (حيث المجموعة مزودة بالترك المألوف) ؟
- ٢ - ما هي فئة مجموعة كل الاعداد الصحيحة (أ) في \mathbb{R} ، (ب) في نفسها (حيث الترك هو مقصور مترك القيمة المطلقة) ؟
- ٣ - أوجد المجموعات النادرة في فضاء متري متقطع X (راجع ١-٨١) .
- ٤ - أوجد مجموعة جزئية كثيفة وهزيلة في \mathbb{R}^2 .
- ٥ - بين بأن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء متري X نادرة هو أن تكون $(\bar{M})^c$ كثيفة في X .
- ٦ - بين بأن المتتمة M^c لمجموعة جزئية هزيلة M في فضاء متري تام X غير هزيلة .
- ٧ - (الرنين) ليكن X فضاء باناخ و Y فضاء منظما و $T_n \in B(X, Y)$ ، $n = 1, 2, \dots$ مؤثرات بحيث يكون $\sup \|T_n\| = +\infty$ بين أنه توجد نقطة $x_0 \in X$ بحيث يكون $\sup \|T_n x_0\| = +\infty$ [تسمى غالبا النقطة x_0 نقطة الرنين ، ومسألتنا توجي باستعمال مصطلح مبرهنة الرنين لمبرهنة المحدودية المنتظمة] .
- ٨ - بين بأن تمام الفضاء X ضروري في المبرهنة ٤-٧-٣ ولا يمكن حذفه .
[خذ الفضاء الجزئي X من المؤلف من كل المتتاليات $x = (\xi_i)$ بفرض أن $\xi_i = 0$ عندما $i \geq J \in \mathbb{N}$ ، حيث J يتعلق بـ x ، ولنفترض أن T_n معرف كما يلي : $[T_n x = f_n(x) = n \xi_n]$.
- ٩ - ليكن $T_n = S^n$ ، حيث يعرف المؤثر $S: l^2 \rightarrow l^2$ كما يلي :
$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots)$$
 .
- أوجد حد لـ $\|T_n x\|$ ، أوجد $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|$.
- ١٠ - (الفضاء e_0) لتكن $y = (\eta_j)$ و $\eta_j \in \mathbb{C}$ بحيث أن $\sum \xi_j \eta_j$ تتقارب أيا كان

حيث $x = (\xi_j) \in c_0$ ، $c_0 \subset \mathbb{R}$ هو الفضاء الجزئي المؤلف من كل المتتاليات
العقدية المتقاربة من الصفر . بين بأن $\sum |\eta_j| < \infty$ (استعن بـ ٤-٧-٣)

١١- ليكن X فضاء باناخ و Y فضاء منظما و $T_n \in B(X, Y)$ متتالية بحيث تكون
($T_n x$) متتالية كوشي في Y أيا كان x من X . بين أن $\|T_n\|$ محدودة .

١٢- اذا كان Y في المسألة ١١ تاما أيضا ، فبين أن $T_n x \rightarrow T x$ ، حيث
• $T \in B(X, Y)$

١٣- اذا كانت (x_n) متتالية في فضاء باناخ X بحيث أن $(K x_n)$ محدودة أيا
كان f من X' ، فبين أن $\|x_n\|$ محدودة .

١٤- اذا كان X و Y فضاءي باناخ وكان $T_n \in B(X, Y)$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، فبين بأن
الدعوى التالية متكافئة :

(أ) $\|T_n\|$ محدودة ،

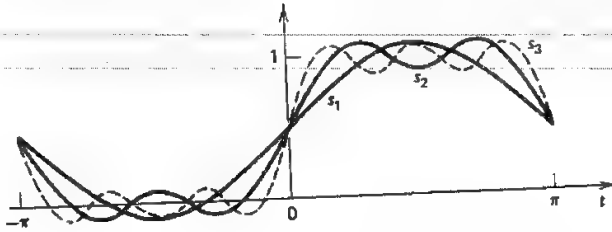
(ب) $\|T_n x\|$ محدودة أيا كان x من X ،

(ج) $\|g(T_n x)\|$ محدودة أيا كان x من X وأيا كان g من Y' .

١٥- لتبيان أن متسلسلة فورييه لدالة x قد تتقارب في نقطة تكون فيها x غير
مستمرة ، أوجد متسلسلة فورييه للدالة

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{اذا كان} \quad x(t+2\pi) = x(t). \\ \text{اذا كان}$$

ارسم بيان x وبيانات المجاميع الجزئية s_0, s_1, s_2, s_3 ، وقارن بالشكل (٤٤) .
بين بأن قيمة المتسلسلة في النقاط $t = \pm n\pi$ هي $1/2$ ، وهو الوسط الحسابي
للنهایتين اليمنى واليسرى لـ x ، إن هذا سلوك نموذجي لمتسلسلات
فورييه .



الشكل (٤٤) . المجاميع الجزئية الثلاثة الاولى s_1 و s_2 و s_3 في المسألة ١٥

٨-٤ التقارب القوي والتقارب الضعيف

لقد سبق وعرفنا في التحليل الرياضي الابتدائي أنماطا مختلفة من التقارب (تقارب عادي ، وشرطي ، ومطلق ، ومنتظم) . وكان من نتيجة هذا أن نظرية المتتاليات والمتسلسلات وتطبيقاتها تمتعت بقدر كبير من المرونة . ان الوضع مماثل في التحليل الدالي ، بل اننا هنا أمام تنوع أكبر للإمكانات ذات الاهمية العملية . وفي هذا البند ، سنغنى في المقام الاول « بالتقارب الضعيف » ، الذي يشكل واحدا من المفاهيم الرئيسية . وتقديمنا له الآن يعود الى أن نظريته تفيد الى درجة كبيرة من مبرهنة المحدودية المنتظمة التي بحثناها في البند السابق .
وفعلا فان التقارب الضعيف واحد من أهم تطبيقات هذه المبرهنة .

لقد سبق وعرفنا تقارب متتاليات عناصرها تنتمي الى فضاء منظم في البند ٣-٢ ، وسنسمي هذا التقارب من الآن فصاعدا **التقارب القوي** بهدف تمييزه عن « التقارب الضعيف » الذي سنورد تعريفه بعد قليل . لذا فاننا نورد أولا ما يلي :

٨-٤-١ تعريف (التقارب القوي)

يقال عن متتالية (x_n) في فضاء منظم X انها متقاربة بقوة (او متقاربة في التنظيم) اذا وجد x من X بحيث يكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

ونعبر عن هذا بأن نكتب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

أو أن نكتب بشكل أبسط

$$x_n \rightarrow x.$$

تسمى x النهاية القوية للمتتالية (x_n) ، ونقول إن (x_n) تتقارب بقوة من

■ • x

أما التقارب الضعيف ، فانه يعرف بدلالة الداليات الخطية المحدودة على X كما يلي :

٢-٨-٤ تعريف (التقارب الضعيف)

يقال عن متتالية (x_n) في فضاء منظم X انها متقاربة بضعف اذا وجد x من X بحيث أنه أيا كان f من X' فان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

ونكتب هذا بالشكل

$$x_n \xrightarrow{w} x$$

أو بالشكل $x_n \xrightarrow{w} x$ • يسمى العنصر x النهاية الضعيفة لـ (x_n) ، ونقول إن (x_n) تتقارب بضعف من x ■ •

لاحظ أن التقارب الضعيف يعني تقارب المتتاليات العددية $a_n = f(x_n)$ أيا كان f من X' •

للتقارب الضعيف تطبيقات عدة في التحليل الرياضي (في حساب التغيرات وفي النظرية العامة للمعادلات التفاضلية مثلاً) • ويوضح هذا المفهوم مبداء

أساسيا في التحليل الدالي • ونعني به حقيقة أن دراسة الفضاءات غالبا ما ترتبط بدراسة فضاءاتها الثنوية •

لتطبيق التقارب الضعيف ، فانه يلزمنا التعرف على بعض خواصه الاساسية التي سننص عليها في التمهيدية التالية • سلاحظ القارئ أننا نستعمل في الاثبات مبرهنة هان - باناخ (من خلال ٤-٣ و ٤-٦ و ٤-٩) ومبرهنة المحدودية المنتظمة • ان هذا يبين أهمية هاتين المبرهنتين فيما يخص التقارب الضعيف •

٣-٨-٤ تمهيدية (التقارب الضعيف)

لتكن (x_n) متتالية متقاربة بضعف في فضاء منظم X ، كان يكون مثلا $x \rightarrow x_n$. عندئذ نجد ما يلي :

- (أ) النهاية الضعيفة x لـ (x_n) وحيدة •
- (ب) كل متتالية جزئية من (x_n) تتقارب بضعف من x •
- (ج) المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة •

البرهان :

(أ) لنفترض أن $x_n \rightarrow y$ وأيضا $x_n \rightarrow x$. عندئذ يكون $f(x_n) \rightarrow f(x)$ وأيضا $f(x_n) \rightarrow f(y)$. ولما كانت $(f(x_n))$ متتالية عددية ، فان نهايتها وحيدة • اذن $f(x) = f(y)$ ، أي أنه أيا كان f من X' فان

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0.$$

وهذا يقتضي أن يكون $x - y = 0$ استنادا الى النتيجة ٤-٣-٤ ، وبالتالي فان النهاية الضعيفة وحيدة •

- (ب) ان هذا ينتج من كون $(f(x_n))$ متتالية متقاربة من الاعداد ، وبالتالي فان كل متتالية جزئية من $(f(x_n))$ متقاربة ولها نهاية المتتالية نفسها •
- (ج) بما أن $(f(x_n))$ متتالية متقاربة من الاعداد ، فانها محدودة ، وليكن

مثلا $|f(x_n)| \leq c_f$ أيا كان n ، حيث c_f ثابت يتعلق بـ f وليس بـ n . وباستعمال التطبيق القانوني $C: X \rightarrow X'$ (البند ٤-٦) فيمكن تعريف g_n من X كما يلي :

$$g_n(f) = f(x_n) \quad f \in X'.$$

(نكتب g_n بدلا من g_n لتجنب كتابة أدلة للادلة) . عندئذ نجد لكل n أن

$$|g_n(f)| = |f(x_n)| \leq c_f,$$

أي أن المتتالية $(g_n(f))$ محدودة أيا كان f من X' . بما أن X' تام وفق ٢-١٠-٤ ، فإن مبرهنة المحدودية المنتظمة ٤-٧-٣ قابلة للتطبيق وتقتضي أن تكون $(\|g_n\|)$ محدودة . وبما أن $\|g_n\| = \|x_n\|$ استنادا الى ٤-٦-١ فإن (ج) صحيح . ■

قد يعجب القارئ لكون التقارب الضعيف لا يلعب دورا في التحليل الرياضي ، أن السبب البسيط لهذا يعود الى أن التمييز بين التقارب القوي والتقارب الضعيف في الفضاءات المنتظمة متهم البعد يزول تماما . سنثبت الآن صحة هذا الكلام ، كما نبرر مصطلحي « القوي » و « الضعيف » .

٤-٨-٤ مبرهنة (التقارب القوي والتقارب الضعيف)

لتكن (x_n) متتالية في فضاء منظم X . عندئذ نجد ما يلي :

- (أ) أن التقارب القوي يقتضي التقارب الضعيف ، والنهاية واحدة .
- (ب) أن عكس (أ) ليس صحيحا بعمامة .
- (ج) إذا كان $\dim X < \infty$ ، فإن التقارب الضعيف يقتضي التقارب القوي .

البرهان :

(أ) ان $x_n \rightarrow x$ تعني تعريفا أن $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ، وهذا يقتضي أنه أيا

كان f من X فإن

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

وبالتالي فإن $x_n \xrightarrow{w} x$

(ب) يمكن التحقق من هذا عن طريق متتالية متعامدة منظمة (e_n) في فضاء هلبرت H • فعلا ، فإنه يوجد لكل f من H' تمثيل ريس $f(x) = \langle x, z \rangle$ • لذا فإن $f(e_n) = \langle e_n, z \rangle$ • كذلك ، فإن متباينة بسل هي (راجع ٣-٤-٦)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z \rangle|^2 \leq \|z\|^2.$$

لذا فإن المتسلسلة الواردة في الطرف الايسر متقاربة ، وبالتالي فإن حدودها يجب أن تتقارب من الصفر عندما $n \rightarrow \infty$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون

$$f(e_n) = \langle e_n, z \rangle \rightarrow 0.$$

وبما أن $f \in H'$ اختياري ، فإننا نرى أن $e_n \xrightarrow{w} 0$ ، في حين أن (e_n) لا تتقارب بقوة نظرا لكون

$$\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n \rangle = 2 \quad (m \neq n).$$

(ج) لنفترض أن $x_n \xrightarrow{w} x$ وأن $\dim X = k$ • لتكن $\{e_1, \dots, e_k\}$ أي قاعدة لـ X ، وليكن مثلا

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \dots + \alpha_k^{(n)} e_k$$

و

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k.$$

لدينا فرضا $f(x_n) \rightarrow f(x)$ أيأ كان f من X' • لنأخذ بشكل خاص الداليات f_1, \dots, f_k المعرفة كما يلي :

$$f_j(e_j) = 1, \quad f_j(e_m) = 0 \quad (m \neq j).$$

(نذكر بأن هذه هي القاعدة الثنوية لـ $\{e_1, \dots, e_k\}$ ، راجع البند ٢-٩) عندئذ يكون

$$f_j(x_n) = \alpha_j^{(n)}, \quad f_j(x) = \alpha_j.$$

لذا فان $f_j(x_n) \rightarrow f_j(x)$ تقتضي أن يكون $\alpha_j^{(n)} \rightarrow \alpha_j$ • نستنتج من هذا مباشرة أن

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{j=1}^k (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^k |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \|e_j\| \rightarrow 0$$

عندما $n \rightarrow \infty$ ، الامر الذي يبين بأن (x_n) متقاربة بقوة من x •
ومن الطريف أن نلاحظ بأنه توجد أيضا فضاءات غير منتهية البعد يكون فيها مفهوما التقارب القوي والتقارب الضعيف متكافئين • وقد بين شور (Schur ١٩٣١ م) أن l^1 هو أحد هذه الفضاءات •

أمثلة

٨-٤ فضاء هلبرت

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \rightarrow x_n$ في فضاء هلبرت هو أن يكون $\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$ ايا كان z في هذا الفضاء •

البرهان :

هذا أمر واضح استنادا الى ١-٣ •

٩-١ الفضاء l^p

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \rightarrow x_n$ في الفضاء l^p ، حيث $1 < p < +\infty$ ، هو أن يتحقق الشرطان التاليان :

- (أ) أن تكون المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة •
(ب) اذا كان i عددا طبيعيا مثبتا ، فان $\xi_j^{(n)} \rightarrow \xi_j$ عندما $n \rightarrow \infty$ •
لدينا هنا $x = (\xi_j)$ $x_n = (\xi_j^{(n)})$

البرهان :

الفضاء الشوي لـ l^p هو l^q ، راجع ٢-١٠-٧ . وكقاعدة لشاو در في l^q نورد المتتالية (e_n) ، حيث $e_n = (\delta_{nj})$ متتالية جميع حدودها أصفار عدا الحد النوني . ان $\text{Span}(e_n)$ كثيفة في l^q ، وبالتالي فاننا نصل الى ما نبغي استنادا الى التمهيدية التالية :

٧-٤-٤ تمهيدية (التقارب الضعيف)

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \xrightarrow{w} x_n$ في فضاء منظم X هو ان يتحقق الشرطان التاليان :

(أ) ان تكون المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة .

(ب) اذا كان f اي عنصر من مجموعة جزئية كلية M من X' ، فان
 $f(x_n) \rightarrow f(x)$

البرهان :

في حالة التقارب الضعيف ، فان (أ) ينتج من التمهيدية ٣-٤-٣ ، ويكون (ب) تافها .

وبالعكس ، لنفترض تحقق (أ) و (ب) . لنأخذ أي f من X' ، ولثبت أن $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ، الامر الذي يعني تعريفا ان التقارب ضعيف .

لدينا استنادا الى (أ) أن $\|x_n\| \leq c$ أيا كان n ، وهكذا فان $\|x\| \leq c$ حيث c عدد كبير بقدر كاف . وبما أن M كلية في X' ، فانه يوجد لكل f في X' متتالية (f_j) في $\text{span } M$ بحيث أن $f_j \rightarrow f$. وبالتالي ، يمكننا أن نجد لكل عدد موجب ε عددا طبيعيا j بحيث يكون

$$\|f_j - f\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

وفضلا عن ذلك ، فلما كان $f_j \in \text{span } M$ وفق الفرض (ب) ، فيوجد عدد طبيعي N بحيث أنه اذا كان $n > N$ أي عدد طبيعي يحقق الشرط $n > N$ فان

$$|f_j(x_n) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

وباستخدام هاتين المتباينتين وتطبيق متباينة المثلث ، فإننا نجد عندما $n > N$ أن

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n) - f_j(x_n)| + |f_j(x_n) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)|$$

$$< \|f - f_j\| \|x_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_j - f\| \|x\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3c} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c = \varepsilon.$$

ولما كان $f \in X'$ اختياريا ، فإن هذا يثبت أن المتتالية (x_n) تتقارب بضعف من

■ • x

مسائل

١ - (التقارب النقطي) إذا كان $x_n \in C[a, b]$ وكان $x_n \xrightarrow{w} x$ ، فبين

أن (x_n) متقاربة نقطيا على $[a, b]$ ، أي أن $(x_n(t))$ متقاربة أيا كان t

من $[a, b]$ •

٢ - ليكن X و Y فضاءين منظمين و $T \in B(X, Y)$ ، ولتكن (x_n) متتالية في

X • فإذا كان $x_n \xrightarrow{w} x_0$ ، أثبت أن $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$ •

٣ - إذا كانت (x_n) و (y_n) متتايتين في فضاء منظم واحد X ، فبين أن $x_n \xrightarrow{w} x$

و $y_n \xrightarrow{w} y$ يقتضيان أن $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y$ وأيضا أن $\alpha x_n \xrightarrow{w} \alpha x$

حيث α أي عدد •

٤ - أثبت أن $x_n \xrightarrow{w} x_0$ يقتضي أن يكون $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x_0\|$ • (أفد من البرهنة

٤-٣-٣) •

٥ - إذا كان $x_n \xrightarrow{w} x_0$ في فضاء منظم X ، فبين أن $x_0 \in \bar{Y}$ ، حيث

حيث $Y = \text{span}(x_n)$ • (استخدم التمهيدية ٤-٦-٧) •

٦ - لتكن (x_n) متتالية متقاربة بضعف في فضاء منظم X ، ولنفترض أن

$x_n \rightarrow x_0$ • برهن على وجود متتالية (y_n) حدودها تراكيب خطية لعناصر من (x_n) بحيث تتقارب هذه المتتالية بقوة من x_0 •

٧ - بين أن أي فضاء جزئي مغلق Y من فضاء منظم X يحوي نهايات كل المتتاليات المتقاربة بضعف من عناصر Y •

٨ - (متتالية كوشي الضعيفة) • متتالية كوشي الضعيفة في فضاء منظم حقيقي أو عقدي X هي متتالية (x_n) في X بحيث أنه إذا كان f أي عنصر من X' ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ تكون متتالية كوشي في R أو C على الترتيب. (لاحظ أن $\lim f(x_n)$ تكون عندئذ موجودة) • يبين أن متتالية كوشي الضعيفة محدودة •

٩ - لتكن A مجموعة في فضاء منظم X بحيث تكون كل مجموعة جزئية غير خالية في A حاوية على متتالية ضعيفة لكوشي • بين أن A محدودة •

١٠ - (التمام الضعيف) يقال عن فضاء منظم X أنه تام بضعف إذا كانت كل متتالية ضعيفة لكوشي في X متقاربة بضعف في X • فإذا كان X انعكاسياً، بين عندئذ أن X تام بضعف •

٩-٤ تقارب متتاليات المؤثرات والداليات

إن متتاليات المؤثرات والداليات الخطية والمحدودة تنشأ مراراً لدى الصياغة المجردة لمواضيع معينة ، مثل مسائل تقارب متسلسلات فورييه ، أو متتاليات حدوديات الاستكمال interpolation ، أو طرائق المكاملة العددية ، وغيرها • وفي مثل هذه الحالات نكون عادة معينين بتقارب تلك المتتاليات للمؤثرات أو الداليات التي تكون متتالية النظم المقابلة لها محدودة أو تحقق خواص مماثلة •

وتبين التجربة أنه في حال المتتاليات التي حدودها عناصر من فضاء منظم ، إن التقارب القوي والتقارب الضعيف كما عرفناهما في البند السابق هما

مفهومان مفيدان • وفي حال المتتاليات التي حدودها مؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ ، فقد تبين أن ثمة ثلاثة أنماط من التقارب ذات قيمة نظرية وعملية كذلك ، وهي :

- (١) التقارب في التنظيم على $B(X, Y)$ ،
- (٢) التقارب القوي لـ $(T_n x)$ في Y ،
- (٣) التقارب الضعيف لـ $(T_n x)$ في Y •

وفيما يلي نورد التعاريف والمصطلحات الضرورية ، وكان قد اقترحها فون نويمان J. von Neumann (١٩٢٩ — ١٩٣٠ م) •

١-٩-٤ تعريف (تقارب متتاليات المؤثرات)

ليكن X و Y فضاءين منظمين •

نقول عن متتالية (T_n) من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ انها :

- (١) متقاربة بانتظام (*) اذا كانت (T_n) متقاربة في التنظيم على $B(X, Y)$ •
- (٢) متقاربة بقوة اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بقوة في Y أيأ كان x من X •
- (٣) متقاربة بضعف اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بضعف في Y أيأ كان x من X •

واذا أردنا استعمال الدساتير ، فإن هذا يعني وجود مؤثر $T: X \longrightarrow Y$ بحيث أن

$$\|T_n - T\| \longrightarrow 0 \quad (١)$$

$$\|T_n x - T x\| \longrightarrow 0 \quad (٢) \quad \text{أيأ كان } x \text{ من } X$$

$$|f(T_n x) - f(T x)| \longrightarrow 0 \quad (٣) \quad \text{أيأ كان } x \text{ من } X \text{ وأيأ كان } f \text{ من } Y'$$

على الترتيب • يسمى T النهاية المنتظمة ، والقوية ، والضعيفة لـ (T_n) على الترتيب • ■

* يطلق بعض المؤلفين على هذا التقارب اسم «التقارب المنتظم بالنسبة للمؤثرات» وذلك زيادة في التجديد . الا اننا سنكتفي بتسمية « التقارب المنتظم » بقصد الاختصار ، وترد ملاحظتان مماثلتان في (٢) و (٣) من هذا التعريف .
(الترجم)

لقد سبق وأشرنا في البند السابق أنه حتى في التحليل الرياضي ، وهو الموضوع الأبسط من التحليل الدالي ، فإن استعمال مفاهيم متنوعة للتقارب يعطي نظرية المتتاليات والمتسلسلات قدرا أكبر من المرونة . ومع ذلك ، فقد يضعف التقارب في خضم المفاهيم العديدة التي أوردناها توا . وقد يسأل عن سبب لزوم التعامل مع ثلاثة أنواع من التقارب لمتتاليات المؤثرات . والاجابة تتلخص في أن كثيرا من المؤثرات التي ترد في المسائل العملية تعطى على أنها نوع معين من النهاية لمؤثرات أبسط . ومن المهم معرفة ماذا تعني بـ « نوع معين » ، ومعرفة أي من الخواص لمؤثر النهاية تقتضيها خواص المتتاليات . كذلك ، فإننا عند البدء بدراسة ما ، لا نعلم دوما بأي معنى توجد النهايات ، لذلك فانه لأمر مفيد أن تكون لدينا جملة من الامكانيات . وقد يكون المرء في مسألة محددة قادرا على اثبات التقارب بمعنى « معتدل » جدا فقط ، بحيث يكون لديه على الاقل شيء ينطلق منه ، وبعد ذلك يطور أدوات لاثبات التقارب بمعنى أقوى ، الامر الذي يكفل خواص « أفضل » لمؤثر النهاية . وهذا أمر نموذجي في حالة المعادلات التفاضلية مثلا .

ليس من العسير اثبات أن

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$$

(حيث النهاية واحدة) ، الا أن العكس ليس صحيحا بعمامة . كما يمكن أن نراه من الامثلة التالية .

امثلة

٢-٩-٤ (الفضاء l^2)

لنأخذ في الفضاء l^2 المتتالية (T_n) ، حيث المؤثرات $T_n: l^2 \rightarrow l^2$ معرفة كالتالي :

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots);$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ • ان هذا المؤثر خطي ومحدود • ومن الواضح أن T_n متقاربة بقوة من الصفر • ذلك أن $T_n x \rightarrow 0 = 0x$ • الا أن (T_n) ليست متقاربة بانتظام ذلك أن $\|T_n - 0\| = \|T_n\| = 1$ •

٣-٩-٤ (الفضاء l^2)

لنأخذ متتالية أخرى (T_n) من المؤثرات $l^2 \rightarrow l^2$ معرفة كالتالي

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ • ان هذا المؤثر خطي ومحدود • سنبين أن T_n متقاربة بضعف من الصفر ، دون أن تتقارب بقوة •
لكل من الداليات الخطية المحدودة f على l^2 تشيل ريس ٣-١-١ ، أي أنه لدينا وفق ٣-١-٦

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{z}_j$$

حيث $z = (z_j) \in l^2$ • لذا ، فاذا وضعنا $j = n+k$ واستعملنا تعريف T_n نجد أن

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j \bar{z}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{z}_{n+k}.$$

واستنادا الى متباينة كوشي - شفارتز من ١-٢-٣ ، فان

$$|f(T_n x)|^2 = |\langle T_n x, z \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} |z_m|^2.$$

ان المتسلسلة الاخيرة هي باقي متسلسلة متقاربة • لذا فان الطرف الايسر يقترب من 0 عندما $n \rightarrow \infty$ ، وبالتالي فان $f(T_n x) \rightarrow 0 = f(0x)$ ، وهذا يعني أن (T_n) متقاربة بضعف من 0 •

يبد أن (T_n) ليست متقاربة بقوة ، ذلك أنه اذا أخذنا $x = (1, 0, 0, \dots)$ ،
فانه يكون

$$\|T_n x - T_m x\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (m \neq n). \quad \blacksquare$$

ان الداليات الخطية هي مؤثرات خطية (مداها في الحقل العددي \mathbb{R} أو \mathbb{C}) ،
وبالتالي فان (١) و (٢) و (٣) يمكن تطبيقها مباشرة . إلا أن (٢) و
(٣) يغدوان متكافئين الآن للسبب التالي . كان لدينا من قبل $T_n x \in Y$ ، لكن لدينا
الآن $f_n(x)$ ينتمي الى \mathbb{R} (أو \mathbb{C}) . لذا فان التقارب في (٢) و (٣) يتم الآن في
الفضاء منتهي البعد (بل ووحيد البعد) \mathbb{R} (أو \mathbb{C}) ، وبالتالي فان (٢) و (٣)
متكافئان استنادا الى (ج) من المبرهنة ٤-٤ . ويدعى المفهوم الباقيان
التقارب القوي والضعيف* (الذي نقرأه « التقارب الضعيف نجمة ») :

٤-٩-٤ تعريف (تقارب متتاليات الداليات القوي والضعيف*)

لتكن (f_n) متتالية من الداليات الخطية المحدودة على فضاء منظم X . عندئذ :
(١) يعني التقارب القوي لـ (f_n) أن ثمة داليا $f \in X'$ بحيث يكون
 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$. ونكتب هذا بالشكل

$$f_n \rightarrow f.$$

(ب) يعني التقارب الضعيف* لـ (f_n) أن ثمة داليا f من X' بحيث
يكون $f_n(x) \rightarrow f(x)$ أيأ كان x من X . ونكتب^(١) هذا بالشكل

$$f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

يسمى في (١) و (ب) النهاية القوية والنهاية الضعيفة* لـ (f_n) تباعا .

(١) هذا المفهوم اهم الى حد ما من مفهوم التقارب الضعيف لـ (f_n) الذي يعني ،
كما سبق ورأينا في ٤-٨-٢ ، أن $g(f_n) \rightarrow g(f)$ أيأ كان g من X'' . هذا
ويقتضي التقارب الضعيف التقارب الضعيف* ، الامر الذي يمكن رؤيته
باستعمال التطبيق القانوني المعرف في البند ٤-٦ (راجع المسألة ٤) .

وبالعودة الى المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ ، فيمكننا السؤال عما يمكن قوله حول مؤثر النهاية $T: X \rightarrow Y$ في (١) و (٢) و (٣) .

فإذا كان التقارب منتظما فإن $T \in B(X, Y)$ ، وفيما عدا ذلك لا يكون $\|T_n - T\|$ معنى . وإذا كان التقارب قويا أو ضعيفا ، فإن T يظل خطيا ، إلا أنه قد يكون غير محدود إذا كان X غير تام .

مثال :

ان الفضاء X المؤلف من كل المتتاليات $x = (\xi_j)$ في l^2 التي كل حد فيها صفري باستثناء عدد منته من الحدود ، والمزودة بالترك المعرف على l^2 ، ليس فضاء تاما . سنعرف متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة T_n على X بالمساواة

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \dots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots),$$

وبالتالي فإن حدود $T_n x$ من الشكل $j\xi_j$ إذا كان $j \leq n$ ، ومن الشكل ξ_j إذا كان $j > n$. ان هذه المتتالية تتقارب بقوة من مؤثر خطي غير محدود T معين بالمساواة $Tx = (\eta_j)$ ، حيث $\eta_j = j\xi_j$.

يبد أنه إذا كان X تاما ، فلا يمكن أن يحدث الوضع الذي ورد في المثال السابق ، نظرا لانه عندئذ ترد التمهيدية الأساسية التالية :

٤-٩-٥ تمهيدية (التقارب القوي)

ليكن $T_n \in B(X, Y)$ حيث X فضاء باناخ و Y فضاء منظم . فإذا كانت المتتالية (T_n) متقاربة بقوة ، وكانت نهايتها T ، فإن $T \in B(X, Y)$

البرهان :

ان خطية T تستخلص مباشرة من خطية T_n . وبما أن $T_n x \rightarrow Tx$ أي أن x من X ، فإن المتتالية $(T_n x)$ محدودة أي أن x ، راجع ١-٤-٢ . ولما كان X تاما ، فإن $\|T_n\|$ محدودة استنادا الى مبرهنة المحدودية المنتظمة ، وليكن مثلا

$\|T_n\| \leq c$ أيًا كان n . يترتب على هذا أن $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq c \|x\|$ ، وهذا يقتضيه أن يكون $\|Tx\| \leq c \|x\|$ ■ .

سنورد الآن معيارا مفيدا للتقارب القوي من خلال المبرهنة التالية :

٦-٩-٤ مبرهنة (التقارب القوي)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية (T_n) من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث X و Y فضاء باناخ ، متقاربة بقوة هو أن يتحقق التالي :

(أ) أن تكون المتتالية $(\|T_n\|)$ محدودة

(ب) أن تكون المتتالية $(T_n x)$ متتالية كوشي في Y أيًا كان x من مجموعة جزئية كلية M من X .

البرهان :

إذا كان $T_n x \rightarrow Tx$ أيًا كان x من X ، فإن (أ) ينتج من مبرهنة المحدودية المنتظمة (نظرا لكون X تاما) ، ويكون (ب) تافها .

وبالعكس ، لنفترض أن (أ) و (ب) محققان ، وليكن مثلا $\|T_n\| \leq c$ أيًا كان n . لنأخذ أي x من X ولنثبت أن $(T_n x)$ متقاربة بقوة في Y . ليكن ε عددا موجبا معطى . لما كانت $\text{span } M$ كثيفة في X ، فانه يوجد y في $\text{span } M$ بحيث أن

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

وبما أن $y \in \text{span } M$ ، فإن $(T_n y)$ هي متتالية كوشي وفق (ب) ، وبالتالي يوجد N بحيث أن

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (m, n > N).$$

وباستعمال هاتين المتباينتين وتطبيق متباينة المثلث ، فاننا نرى مباشرة أن $(T_n x)$ هي متتالية كوشي في Y ، ذلك أنه إذا كان m و n أي عددين طبيعيين يحققان الشرط $m, n > N$ فإن

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\|$$

$$< \|T_n\| \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\| \|x - y\|$$

$$< c \frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c \frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.$$

وبما أن Y تام ، فإن $(T_n x)$ متقاربة في Y • ولما كان x عنصرا اختياريا في X ،
فاننا نكون قد أثبتنا التقارب القوي للمتتالية (T_n) • ■

٧-٩-٤ نتيجة (الداليات)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية (f_n) من الداليات الخطية المحدودة على فضاء باناخ ضعيفة* التقارب ، حيث يفترض أن النهاية دالي خطي محدود على X ، هو أن يتحقق التالي :

(أ) أن تكون المتتالية $\|f_n\|$ محدودة •

(ب) أن تكون المتتالية $(f_n(x))$ متتالية كوشي ايا كان x من مجموعة جزئية

كلىة M من X •

لهذه النظرية تطبيقات هامة ، سنورد اثنين منها في البنود اللاحقة •

مسائل

١ - بين بأن التقارب المنتظم $T_n \rightarrow T$ ، حيث $T_n \in B(X, Y)$ ، يقتضي التقارب القوي ، كما تكون النهاية واحدة •

٢ - اذا كان $S_n, T_n \in B(X, Y)$ ، وكانت المتتاليتان (S_n) و (T_n) متقاربتين بقوة من النهايتين S و T تباعا ، فين أن $(S_n + T_n)$ متقاربة بقوة من النهاية $S + T$ •

٣ - بين بأن التقارب القوي في $B(X, Y)$ يقتضي التقارب الضعيف ، كما تكون النهاية واحدة •

٤ - بين بأن التقارب الضعيف في الحاشية السفلى الواردة في الصفحة ٣٤٢

تقتضي التقارب الضعيف* . بين بأن العكس يصح إذا كان X انعكاسيا .

٥ - لا يقتضي التقارب القوي التقارب المنتظم . بين صحة هذه الدعوى بأخذ

$$T_n = f_n: I^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ حيث } f_n(x) = \xi_n \text{ و } x = (\xi_n)$$

٦ - ليكن $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث $n = 1, 2, \dots$. كي ندرك الحافز على استخدام

مصطلح « منتظم » الوارد في التعريف ٩-١ ، بين بأن الشرط اللازم

والكافي كي يكون $T_n \rightarrow T$ هو أن يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح

موجب N ، تابع لـ ε فقط ، بحيث أنه إذا كان n أي عدد طبيعي

يحقق الشرط $n > N$ ، وكان x أي عنصر من X نظيمه 1 ، فإن

$$\|T_n x - T x\| < \varepsilon.$$

٧ - ليكن $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث X فضاء باناخ . فإذا كانت (T_n) متقاربة بقوة ،

فبين أن $\|T_n\|$ محدودة .

٨ - لنفترض أن $T_n \rightarrow T$ ، حيث $T_n \in B(X, Y)$. بين أنه يوجد لكل عدد موجب

ε ولكل كرة مغلقة K محتواة في X عدد صحيح موجب N بحيث

تتحقق المتباينة $\|T_n x - T x\| < \varepsilon$ أيا كان العدد الطبيعي n المحقق للمتباينة

$n > N$ وأيا كان x في K .

٩ - بين أن $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ في التمهيدية ٩-٥ .

١٠ - ليكن X فضاء فصولا لباناخ ، ولتكن M مجموعة جزئية محدودة في X' .

بين بأن كل متتالية من عناصر M تحوي متتالية جزئية تقارب بضعف* من

عنصر في X' .

١٠-٤ تطبيق على جموعية المتتاليات

للتقارب الضعيف* تطبيقات هامة في نظرية المتتاليات (والمتسلسلات)

المتباعدة • من المعلوم أنه لا يوجد لمتتالية متباعدة نهاية بالمعنى المعتاد ، وما ترمي إليه نظرية المتتاليات المتباعدة هو أن نقرن بمتتاليات متباعدة معينة « نهاية » بمفهوم معمم . ويسمى الاجراء المتبع لادراك هذا الهدف « طريقة في المجموعة » .

وعلى سبيل المثال ، فإذا كانت $x = (\xi_k)$ متتالية معطاة ، فمن الممكن حساب المتتالية $y = (\eta_n)$ التي حدودها المتوسطات الحسابية التالية

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), \quad \dots, \quad \eta_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \dots + \xi_n), \quad \dots$$

وهذا مثال على طريقة في المجموعة • فإذا تقاربت y من نهاية η (بالمعنى المعتاد) ، فإننا نقول بأن x جموعة وفق الطريقة السابقة وأن لها نهاية معمة هي η • فمثلا إذا كان

$$x = (0, 1, 0, 1, 0, \dots) \quad \text{فان} \quad y = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots)$$

وعندئذ يوجد لـ x النهاية المعمة $\frac{1}{2}$ •

تسمى طريقة في المجموعة طريقة مصفوفية إذا أمكن تمثيلها بالشكل

$$y = Ax$$

حيث نكتب $x = (\xi_k)$ و $y = (\eta_n)$ على شكل متجهين عموديين غير منتهيين ؛ وحيث $A = (a_{nk})$ مصفوفة غير منتهية ، وهنا $n, k = 1, 2, \dots$ • ونستعمل في الدستور $y = Ax$ ضرب المصفوفات ، أي أن حدود y هي

$$(1) \quad \eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \xi_k \quad n = 1, 2, \dots$$

ويوضح المثال السابق طريقة مصفوفية • (ما هي المصفوفة ؟) •

هنالك مصطلحات متعلقة بهذا الموضوع نوردتها فيما يلي • تدعى الطريقة

المعطاة بـ (1) اختصارا بالطريقة A ، ذلك أنه يرمز الى المصفوفة الموافقة بـ

A . وإذا كانت التسلسلات في (1) متقاربة جميعا ، وكانت $y = (\eta_n)$ متقاربة بالمعنى المعتاد ، فإننا نسمي نهايتها النهاية A - لـ x ، ونقول عن x انها مجموعة A - . وتدعى مجموعة كل المتتاليات المجموعة A - مدى الطريقة A - .

يقال عن طريقة A - انها منتظمة (او دائمة) اذا حوى مداها كل المتتاليات المتقاربة واذا كانت النهاية A - لكل متتالية منها مساوية للنهاية المعتادة ، أي أنه اذا كانت

$$\xi_k \rightarrow \xi \quad \text{تقتضي} \quad \eta_n \rightarrow \xi$$

من الواضح أن الانتظام متطلب طبيعي ، ذلك أن كل طريقة لا يمكن تطبيقها على متتاليات متقاربة معينة أو كانت تغير نهاية هذه المتتاليات لن تكون ذات فائدة عملية . ونورد فيما يلي معيارا أساسيا للانتظام .

١-١-٤ مبرهنة النهاية لطولتز (طرق المجموعة المنتظمة) .

الشرط اللازم والكافي كي تكون طريقة في المجموعة A - مصفوفتها $A = (\alpha_{nk})$ منتظمة هو أن يتحقق ما يلي :

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk} = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{عندما}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \gamma \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{عندما}$$

حيث γ ثابت لا يتعلق بـ n .

البرهان :

سنبين أن

(1) الشروط (2) و (3) و (4) لازمة للانتظام

(ب) الشروط (2) و (3) و (4) كافية للانتظام .

أما التفاصيل فهي التالية :

(أ) لنفترض أن الطريقة A منتظمة ، ولتكن x_k متتالية بحيث أن الحد الذي ترتيبه k يساوي 1 ، وباقي الحدود أصفار . ونجد لـ x_k أن $\eta_n = \alpha_{nk}$ في (1) • بما أن x_k متقاربة ونهايتها 0 ، فإن هذا يبين بأن (2) لا بد أن تكون صحيحة .

كذلك ، فإنه يوجد للمتتالية $x = (1, 1, 1, \dots)$ النهاية 1 ، ونرى من (1) أن η_n تساوي الآن المتسلسلة الواردة في (3) • لذا فإن (3) يجب أن تكون صحيحة .

سنبين أن (4) لازمة للانتظام • ليكن c فضاء باناخ المؤلف من كل المتتاليات المتقاربة حيث التنظيم معرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|.$$

راجع ١-٣-٥ • سنورد الداليات الخطية f_{nm} على c المعرفة كالتالي :

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{nk} \xi_k \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

إن كلا من f_{nm} محدود لان

$$|f_{nm}(x)| \leq \sup_j |\xi_j| \sum_{k=1}^m |\alpha_{nk}| = \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_{nk}| \right) \|x\|.$$

ان الانتظام يقتضي تقارب المتسلسلات في (1) أيًا كان x في c • لذا فإن (1) تعرف داليات خطية f_1 و f_2 و ... على c محددة كالتالي :

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

نستنتج من (5) أن $f_{nm}(x) \rightarrow f_n(x)$ عندما $m \rightarrow \infty$ أيًا كان x من c • ان

هذا تقارب ضعيف* ، وبالتالي فإن f_n محدودة وفق التمهيدية ٤-٩-٥ (عند وضع $T = f_n$) . كذلك ، فإن $(f_n(x))$ متقاربة أيا كان x من c ، وبالتالي فإن $(\|f_n\|)$ محدودة استنادا الى النتيجة ٤-٩-٧ ، وليكن مثلا

$$(7) \quad \|f_n\| \leq \gamma \quad \text{أيا كان } n$$

لنعرف ما يلي ، حيث $m \in \mathbb{N}$ اختياري

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} |\alpha_{nk}| / \alpha_{nk} & \text{إذا كان } k \leq m \text{ و } \alpha_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } k > m \text{ أو } \alpha_{nk} = 0 \end{cases}$$

عندئذ يكون $x_{nm} = (\xi_k^{(n,m)}) \in c$. كذلك فإن $\|x_{nm}\| = 1$ إذا كان $x_{nm} \neq 0$ وان $\|x_{nm}\| = 0$ إذا كان $x_{nm} = 0$. فضلا عن ذلك فإن

$$f_{nm}(x_{nm}) = \sum_{k=1}^m \alpha_{nk} \xi_k^{(n,m)} = \sum_{k=1}^m |\alpha_{nk}|$$

أيا كان m . لذا فإن

$$(8) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \sum_{k=1}^m |\alpha_{nk}| = f_{nm}(x_{nm}) \leq \|f_{nm}\| \\ (b) \quad & \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \|f_n\|. \end{aligned}$$

وهذا يبين بأن المتسلسلة الواردة في (4) متقاربة . وهكذا فإن (4) تنتج من (7) .

(ب) سنبين الآن بأن (2) و (3) و (4) شروط كافية للاتظام . سنعين داليا خطأ f على c كما يلي :

$$f(x) = \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$$

حيث $x = (\xi_k) \in c$ • يمكن رؤية محدودية f من كون

$$|f(x)| = |\xi| \leq \sup_j |\xi_j| = \|x\|.$$

لتكن $M \subset c$ مجموعة كل المتتاليات التي تتساوى حدودها بدءاً من حد معين ،
ونعني بذلك أنه إذا كانت $x = (\xi_k)$ مثلاً ، فإن

$$\xi_j = \xi_{j+1} = \xi_{j+2} = \dots = \xi,$$

و j يعتمد على x • عندئذ يكون $f(x) = \xi$ كما في السابق ، ونجد في (1) و
(6) أن

$$\begin{aligned} \eta_n = f_n(x) &= \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{nk} \xi_k + \xi \sum_{k=j}^{\infty} \alpha_{nk} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{nk} (\xi_k - \xi) + \xi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}. \end{aligned}$$

لذا نجد استناداً الى (2) و (3) أن

$$(9) \quad \eta_n = f_n(x) \longrightarrow 0 + \xi \cdot 1 = \xi = f(x)$$

أياً كان x من M •

سنستعمل النتيجة ٤-٩-٧ ثانية ، وسنبين من ثم أن المجموعة التي عرفنا عليها التقارب المعبر عنه بـ (9) كثيفة في c • لتكن $x = (\xi_k) \in c$ ، وليكن $\xi_k \longrightarrow \xi$ • عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$|\xi_k - \xi| < \varepsilon \quad \text{عندما } k \geq N$$

من الواضح أن

$$\bar{x} = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \xi, \xi, \xi, \dots) \in M$$

$$x - \bar{x} = (0, \dots, 0, \xi_N - \xi, \xi_{N+1} - \xi, \dots).$$

يترب على هذا أن $\|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ • ولما كان $x \in C$ اختياريا ، فإن هذا يبين أن M كثيفة في C •

وأخيرا ، فأننا نستنتج من (4) أن

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \gamma \|x\|$$

أيا كان $x \in C$ ، وأيا كان n • لذا فإن $\|f_n\| \leq \gamma$ ، أي أن $(\|f_n\|)$ محدودة •
وفضلا عن ذلك ، فإن (9) تعني التقارب $f_n(x) \rightarrow f(x)$ أيا كان x في المجموعة الكثيفة M ، وهذا يقتضي بناء على النتيجة ٤-٧ التقارب الضعيف $f_n \xrightarrow{w} f^*$ ، وهكذا نكون قد بينا أنه إذا كانت $\xi = \lim \xi_k$ موجودة ، فإن $\eta_n \rightarrow \xi$ • وهذا يعني تعريفا الانتظام ، ونكون بهذا قد أثبتنا صحة المبرهنة ١٠

مسائل

١ - تعرف طريقة شيزارو C_1 في المجموعة بالدستور

$$\eta_n = \frac{1}{n} (\xi_1 + \dots + \xi_n) \quad n = 1, 2, \dots,$$

أي أننا نأخذ المتوسطات الحسابية • أوجد المصفوفة الموافقة A •

٢ - طبق الطريقة C_1 في المسألة ١ على المتالتين

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \quad \text{و} \quad \left(1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{8}, -\frac{3}{16}, -\frac{4}{32}, \dots\right).$$

٣ - عبر عن (ξ_n) في المسألة ١ بدلالة (η_n) • أوجد المتتالية (ξ_n) بحيث يكون

$$\bullet (\eta_n) = (1/n)$$

٤ - استخدم الدستور الوارد في المسألة ٣ للتوصل الى متتالية غير جموعة بالطريقة C_1 .

٥ - تعرف طرق هولدر H_p في الجموعية كما يلي : H_1 مطابقة للطريقة C_1 في المسألة ١ . أما الطريقة H_2 فتتألف من تطبيقين متتاليين لـ H_1 ، أي أننا نأخذ أولا المتوسط الحسابي ، ثم نأخذ ثانية المتوسطات الحسابية لتلك المتوسطات . وأما H_3 فيتألف من ثلاث تطبيقات متتالية لـ H_1 ، وهكذا . طبق H_1 و H_2 على المتتالية $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots)$ وقدم التعليق المناسب .

٦ - (المتسلسلات) نقول عن متسلسلة غير منتهية أنها جموعة A - إذا كانت متتالية مجاميعها الحزئية جموعة A - ، وتسمى النهاية A - لتلك المتتالية المجموع A - للمتسلسلة . بين أن $1+z+z^2+\dots$ جموعة C_1 - وأن $|z|=1$ و $z \neq 1$ ، وأن المجموع C_1 - هو $1/(1-z)$.

٧ - (طريقة C_k - لشيزارو) . لنفترض أن (ξ_n) متتالية ، وأن $\sigma_n^{(0)} = \xi_n$ وأن

$$\sigma_n^{(k)} = \sigma_0^{(k-1)} + \sigma_1^{(k-1)} + \dots + \sigma_n^{(k-1)} \quad (k \geq 1, n = 0, 1, 2, \dots).$$

فإذا أوجدنا لعنصر مثبت k من N أن $\eta_n^{(k)} = \sigma_n^{(k)} / \binom{n+k}{k} \rightarrow \eta$ قلنا إن (ξ_n) جموعة C_k - وأن η هي النهاية C_k - لها . بين بأن هذه الطريقة تفيد في أنه يمكن تمثيل $\sigma_n^{(k)}$ بدلالة الحدود ξ_j بصورة جد بسيطة ، ونعني بها

$$\sigma_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+k-1-\nu}{k-1} \xi_\nu.$$

٨ - إن طريقة اولر للمتسلسلات تقرن بمتسلسلة معطاة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} \quad \text{المتسلسلة المحولة} \quad \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$$

حيث

$$\Delta^0 a_j = a_j, \quad \Delta^n a_j = \Delta^{n-1} a_j - \Delta^{n-1} a_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

وحيث أوردنا $(-1)^n$ كي نبين بأن a_n ليست موجبة بالضرورة • يمكن
الاثبات بأن الطريقة منتظمة ، وبالتالي فإن تقارب المتسلسلة المعطاة يقتضي
تقارب المتسلسلة المحولة ، والمجموع واحد • بين بأن الطريقة تعطي
الدستور

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

٩ - بين بأن طريقة أولر في المسألة ٨ تعطي الدستور

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right).$$

١٠ - بين أن طريقة أولر تعطي النتيجة التالية ، واعط التعليق المناسب

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n.$$

١١-٤ المكاملة العددية والتقارب الضعيف*

للتقارب الضعيف* تطبيقات مفيدة في المكاملة العددية والمفاضلة والاستكمال •
وستعنى في هذا البند بالمكاملة العددية ، أي بمسألة الحصول على القيم التقريبية
لتكامل معطى

$$\int_a^b x(t) dt.$$

ونظرا لكون المسألة هامة في التطبيقات ، فقد تم تطوير طرق متنوعة لهذا
الغرض ، كقاعدة شبه المنحرف ، وقاعدة سمبسون ، ودساتير أخرى أكثر تعقيدا
مثل دساتير نيوتن - كوتس وغوص • (لمراجعة بعض الحقائق الأولية ، راجع
مجموعة المسائل في نهاية البند) •

ان السمة المشتركة بين هذه الطرق وغيرها هي أننا نختار أولا نقاطا في $[a, b]$ ، تسمى عقد ، ، ثم تقرب القيمة المجهولة للتكامل باستخدام تركيب خطي لقيم x في العقد . وتعتمد العقد ومعاملات التركيب الخطي على الطريقة المستخدمة ، وليس على الدالة المكاملة x . وبالطبع ، فان الفائدة التي نجنيها من تطبيق طريقة ما تتحدد الى حد كبير بدقتها ، وقد تتطلب ازدياد الدقة كلما ازداد عدد العقد .

سنرى في هذا البند أنه يمكن للتحليل الدالي أن يقدم عونا في هذا المجال . وفعلا ، فاننا سنشرح الخلفية العامة لتلك الطرق ، ثم نبحث في مسألة التقارب عند ازدياد عدد العقد .

سنعنى هنا بالدوال المستمرة ، وهذا يوحي باستعمال فضاء باناخ $X = C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال الحقيقية على $J = [a, b]$ والمزود بالنظام المعروف بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|.$$

عندئذ يعرف التكامل الذي أوردناه في بداية البند داليا خطيا f على X معرفا بالمساواة

$$(1) \quad f(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

وللحصول على دستور للمكاملة العددية ، فقد نهج أسلوبا مائلا للاسلوب المتبع في الطرائق المذكورة آنفا . وبالتالي فاننا نختار لكل عدد صحيح موجب n الاعداد الحقيقية التالية

$$t_0^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$$

التي تسمى عقدا ، والتي عددها $n+1$ ، بحيث أن

$$(2) \quad a \leq t_0^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b.$$

بعدئذ نختار الأعداد الحقيقية

$$\alpha_0^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$$

التي تسمى معاملات ، والتي عددها $n+1$ ، ومن ثم تعرف الداليات f_n على X بالمساويات

$$(3) \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad n = 1, 2, \dots$$

ان هذه طريقة عددية في الكاملة ، وتمثل قيمة $f_n(x)$ تقريبا لـ $f(x)$ ، حيث x معطى . وللتعرف على دقة هذه الطريقة ، فاننا ندرس الداليات f_n على النحو التالي .

ان كل f_n محدود لان $|x(t_k^{(n)})| \leq \|x\|$ وفق تعريف النظيم . لذا فان

$$(4) \quad |f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| |x(t_k^{(n)})| \leq \left(\sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| \right) \|x\|.$$

سنبين الآن أمرا يفيدنا فيما بعد ، وهو أن تنظيم f_n يعطى بالمساواة

$$(5) \quad \|f_n\| = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}|.$$

وفعلا ، فان (4) تبين بأن قيمة $\|f_n\|$ لا يمكنها أن تتجاوز الطرف الايمن من (5) ، وبالتالي فان المساواة تنتج اذا أخذنا x_0 من X بحيث أن $|x_0(t)| \leq 1$ على J وأن

$$x_0(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \alpha_k^{(n)} \geq 0 \\ -1 & \alpha_k^{(n)} < 0 \end{cases}$$

وذلك لانه يكون عندئذ $\|x_0\| = 1$ ، ويكون

$$f_n(x_0) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}|.$$

إذا كان x عنصرا معطى من X فإن الدستور (3) يعطي قيمة تقريبية $f_n(x)$ لـ $f(x)$ في (1) وبالطبع ، فالتنا معنيون بالدقة كما ذكرنا قبل قليل ، ونحن نبغي أن تزيد هذه الدقة مع تزايد n . ان هذا يوحي بالمفهوم التالي :

١-١١-٤ تعريف (التقارب)

يقال عن الطريقة العددية في المكاملة المعرفة بـ (3) انها متقاربة من أجل عنصر $x \in X$ اذا كان

$$(6) \quad f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (n \longrightarrow \infty),$$

حيث f معرف بـ (1) . ■

كذلك ، لما كانت المكاملة التامة للحدوديات سهلة ، فمن الطبيعي أن نعمل التالي :

٢-١١-٤ مستطلب

إذا كان n عددا طبيعيا ما ، وكان f حدوديا درجته لا تتجاوز n ، فإن

$$(7) \quad f_n(x) = f(x). \quad \blacksquare$$

لما كانت الداليات f_n خطية ، فيكفي أن تتطلب (7) للقوى $n+1$ المعرفة كما يلي

$$x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = t, \quad \dots, \quad x_n(t) = t^n.$$

وفعلا ، فالتنا نجد عندئذ للحدودي من الدرجة n المعطى بالمساواة $x(t) = \sum \beta_i t^i$ أن

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i f_n(x_i) = \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i) = f(x).$$

نرى بأننا هكذا نحصل على الشروط الـ $n+1$ التالية

$$(8) \quad f_n(x_j) = f(x_j) \quad j=0, \dots, n.$$

سنبين أنه يمكن تحقيق هذه الشروط • بما أن الوسطاء $2n+2$ متيسرة ،
ونعني بها $n+1$ من العقد و $n+1$ من المعاملات ، فمن الممكن اختيار بعضها
بصورة كيفية • لنختار العقد $t_k^{(n)}$ ، ولنثبت أنه يمكننا عندئذ تعيين تلك المعاملات
بصورة وحيدة •

لدينا في (8) الآن $x_j(t_k^{(n)}) = (t_k^{(n)})^j$ ، وبالتالي فإن (8) تأخذ الشكل

$$(9) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} (t_k^{(n)})^j = \int_a^b t^j dt = \frac{1}{j+1} (b^{j+1} - a^{j+1})$$

حيث $j=0, \dots, n$ • وإذا كان n عدداً مثنياً ما ، فإن هذا هو جملة غير متجانسة
من $n+1$ من المعادلات الخطية في $n+1$ من المجاهيل هي $\alpha_0^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$ •
ويوجد حل وحيد إذا كان للجملة المتجانسة الموافقة

$$\sum_{k=0}^n (t_k^{(n)})^j \gamma_k = 0 \quad (j=0, \dots, n)$$

الحل التافه فقط $\gamma_n=0, \dots, \gamma_0=0$ أي إذا تحقق الشيء نفسه للجملة

$$(10) \quad \sum_{j=0}^n (t_k^{(n)})^j \gamma_j = 0 \quad (k=0, \dots, n)$$

التي مصفوفة معاملاتها هي منقول مصفوفة المعاملات للجملة السابقة • ان هذا
صحيح نظراً لكون (10) تعني أن الحدودي

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j t^j$$

الذي هو من الدرجة n ، صفر في العقد التي عددها $n+1$ ، وبالتالي فإنه يجب
أن يطابق الصفر ، أي أن تكون كل معاملات γ_i أصفاراً • ■

وهكذا فإن النتيجة التي خلصنا إليها تنص على أنه يوجد لكل اختيار للعقد

يحقق (2) معاملات تتحدد بصورة وحيدة بحيث يكون المتطلب ٢-١١-٤ محققا .
لذا فان الطريقة الموافقة متقاربة من أجل جميع الحدوديات . لنطرح الآن السؤال
حول الشروط الاضافية التي يجب فرضها كي تكون الطريقة متقاربة ايا كانت
الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$. وقد توصل بوليا عام ١٩٣٣ م . في هذا
الصدد الى المبرهنة التالية :

٢-١١-٤ مبرهنة بوليا في التقارب (التكامل العددي)

الشرط اللازم والكافي كي تكون طريقة المكاملة العددية (3) التي تحقق
٢-١١-٤ متقاربة ايا كانت الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ هو ان يوجد
عدد c بحيث ان

$$\sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| \leq c \quad \text{اذا كان } n \quad (11)$$

البرهان :

ان المجموعة W لكل الحدوديات ذات المعاملات الحقيقية كثيفة في الفضاء
الحقيقي $X = C[a, b]$ استنادا الى مبرهنة فير شتراس في التقريب (التي سنورد
برهانها بعد قليل) ، ونجد أنه اذا كان x من W فان التقارب حاصل استنادا الى
٢-١١-٤ . ويترب على (5) أن الشرط اللازم والكافي كي تكون $\|f_n\|$
محدودة هو أن تتحقق المتباينة (11) من أجل عدد حقيقي ما c . ان صحة
مبرهنتنا تستخلص الآن من النتيجة ٢-٩-٤ نظرا لكون التقارب $f_n(x) \rightarrow f(x)$
اذا كان x من X تقاربا ضعيفا $f_n \xrightarrow{*} f$.

من الواضح جدا أنه يمكننا في هذه المبرهنة الاستعاضة عن الحدوديات بأي
مجموعة أخرى كثيفة في الفضاء الحقيقي $C[a, b]$.

وفضلا عن ذلك ، ففي أغلب طرق المكاملة تكون المعاملات غير سالبة جميعا .
وبأخذ $x=1$ ، فاننا نجد استنادا الى ٢-١١-٤ أن

$$f_n(1) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| = f(1) = \int_a^b dt = b - a,$$

لذا فان (11) صحيحة ، وهذا يثبت ما يلي :

٤-١١-٤ مبرهنة ستيفكوف (المكاملة العددية)

ان طريقة المكاملة العددية (3) التي تحقق ٤-١١-٢ والتي لها معاملات غير سالبة $\alpha_k^{(n)}$ تتقارب ايا كانت الدالة المستمرة .

استخدمنا في برهان ٤-١١-٣ المبرهنة التالية :

٤-١١-٥ مبرهنة فيرشتراس في التقريب (الحدوديات)

ان مجموعة كل الحدوديات W ذات المعاملات الحقيقية كثيفة في الفضاء الحقيقي $C[a, b]$.

لذا فانه يوجد لكل x من $C[a, b]$ ولكل عدد موجب ε حدودي p يحقق المتباينة $|x(t) - p(t)| < \varepsilon$ ايا كان t من $[a, b]$.

البرهان :

كل x من $C[a, b]$ منتظمة الاستمرار على $J = [a, b]$ نظرا لكون J متراصة . لذلك فانه يوجد لاي عدد موجب ε دالة y يانها قوس من مضلع بحيث أن

$$(12) \quad \max_{t \in J} |x(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

سنفترض أولا أن $x(a) = x(b)$ و $y(a) = y(b)$. لما كانت y مؤلفة من دوان خطية ومستمرة ، فان معاملات فورييه لها ذات حدود من الشكل

$$|a_n| < k, |a_m| < k/m^2, |b_m| < k/m^2.$$

ويمكن رؤية هذا بتطبيق المكاملة بالتجزئة على الدستورين اللذين يعطيان a_m و b_m (راجع ٣-٥-١ حيث لدينا $[a, b] = [0, 2\pi]$) . (راجع أيضا المسألة ١٠ في نهاية هذا البند) . لذا فاننا نجد لمتسلسلة فورييه لـ y (المسئلة للتمديد الدوري لـ y ، بدور يساوي $b-a$) ، لدى كتابة $\kappa = 2\pi/(b-a)$ للبطاسة أن

$$(13) \quad \left| a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \kappa m t + b_m \sin \kappa m t) \right| \\ \leq 2k \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) = 2k \left(1 + \frac{1}{6} \pi^2 \right).$$

وهذا يبين بأن المتسلسلة تتقارب بانتظام على J . وبالتالي فاننا نجد أن المجموع الجزئي الـ n ، وهو s_n ، حيث n كبير كفاية ، يحقق المتباينة

$$(14) \quad \max_{t \in J} |y(t) - s_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ان متسلسلات تايلور لدوال الجيوب وجيوب التمام في s_n تتقارب بانتظام أيضا على J ، وبالتالي فهناك حدودي p (نجده مثلا من مجاميع جزئية مناسبة لهذه المتسلسلات) بحيث أن

$$\max_{t \in J} |s_n(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

يترتب على هذا وعلى (12) و (14) وعلى

$$|x(t) - p(t)| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - s_n(t)| + |s_n(t) - p(t)|$$

أن

$$(15) \quad \max_{t \in J} |x(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

وهذا يصح أيا كانت x في $C[a, b]$ المحققة للشرط $x(a) = x(b)$. أما اذا كان $x(a) \neq x(b)$ ، فاننا نأخذ $u(t) = x(t) - \gamma(t-a)$ ، ونأخذ γ بحيث يكون $u(a) = u(b)$. عندئذ نجد لـ u حدوديا q يحقق المتباينة $|u(t) - q(t)| < \varepsilon$ على J . لذا فان $p(t) = q(t) + \gamma(t-a)$ تحقق (15) لان $x - p = u - q$. ولما كان العدد الموجب ε اختياريا ، فاننا نكون قد بينا أن W كثيفة في $C[a, b]$. ■

ان أول اثبات لهذه المبرهنة قدمه فير شتراس عام ١٨٨٥ م ، وثمة براهين

عديدة أخرى ، أحدها أتى به بير نشتاين عام ١٩١٢ م ، وهو يعطي متسالية متقاربة بانتظام من الحدوديات (« حدوديات بير نشتاين ») بصورة ظاهرة بدلالة x . ويمكن العثور على برهان بير نشتاين في الصفحتين ٨ و ٩ من كتاب :

Yosida, K. (1971), *Functional Analysis*. 3rd ed. Berlin: Springer

مسائل

١ - ان قاعدة المستطيل هي (الشكل ٤٥)

$$\int_a^b x(t) dt \approx h[x(t_1^*) + \dots + x(t_n^*)], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

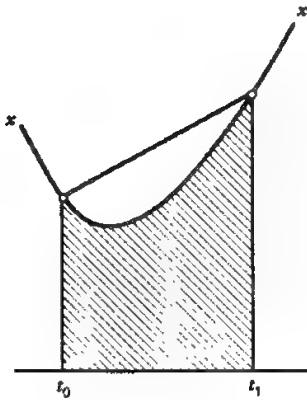
حيث $t_k^* = a + (k - \frac{1}{2})h$ • كيف يمكن الحصول على هذا الدستور ؟ ما هي العقد وما هي المعاملات ؟ كيف يمكن الحصول على حدي الخطأ للقيمة التقريبية المحسوبة بهذا الدستور ؟

٢ - إن قاعدة شبه المنحرف هي (الشكل ٤٦)

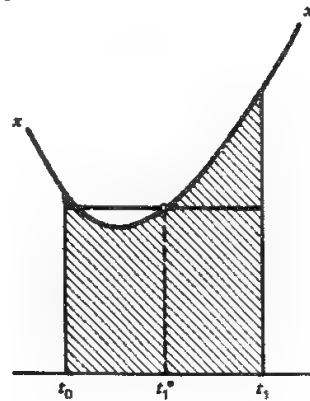
$$\int_{t_0}^{t_1} x(t) dt \approx \frac{h}{2} (x_0 + x_1), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

أو

$$\int_a^b x(t) dt \approx h(\frac{1}{2}x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n)$$



الشكل (٤٦) . قاعدة شبه المنحرف



الشكل (٤٥) . قاعدة المستطيل

حيث $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$ • اشرح كيفية الحصول على الدساتير اذا قربنا x بدالة مؤلفة من أجزاء خطية •

٣ - ان قاعدة سمبسون هي (الشكل ٤٧) •

$$\int_{t_0}^{t_2} x(t) dt \approx \frac{h}{3} (x_0 + 4x_1 + x_2) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

أو

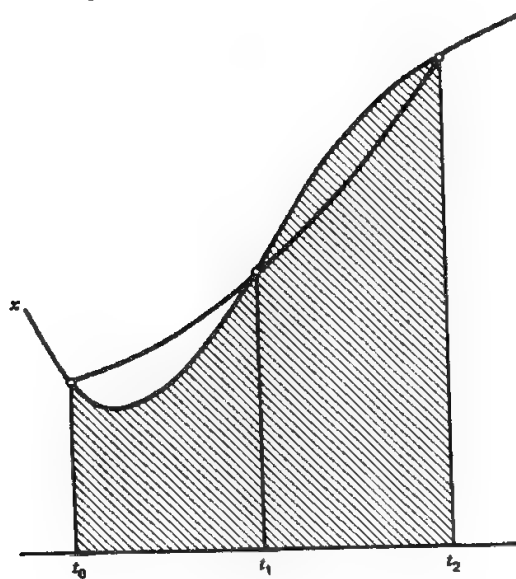
$$\int_a^b x(t) dt \approx \frac{h}{3} (x_0 + 4x_1 + 2x_2 + \dots + 4x_{n-1} + x_n)$$

حيث n زوجي و $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$ • بين بأننا نجد هذه الدساتير اذا قربنا x على $[t_0, t_2]$ بحدودي من الدرجة الثانية قيمه في النقاط t_0, t_1, t_2 تساوي قيم x في هذه النقاط • ونجد نتيجة مماثلة في $[t_2, t_4]$ ، وهكذا •

٤ - ليكن $f(x) = f_n(x) - \varepsilon_n(x)$ ، حيث f_n هو التقريب الذي نحصل عليه باستخدام قاعدة شبه المنحرف • بأنه اذا كانت x أي دالة مشتقاها من المرتبة الاولى والثانية مستمران ، فان حدي الخطأ هما

$$k_n m_2^* \leq \varepsilon_n(x) \leq k_n m_2 \quad \text{حيث} \quad k_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

حيث m_2 و m_2^* هما القيمة العظمى والقيمة الصغرى لـ x'' على $[a, b]$ •



الشكل (٤٧) قاعدة سمبسون

t	e^{-t^2}
0	1.000 000
0.1	0.990 050
0.2	0.960 789
0.3	0.913 931
0.4	0.852 144
0.5	0.778 801
0.6	0.697 676
0.7	0.612 626
0.8	0.527 292
0.9	0.444 858
1.0	0.367 879

• تستعمل قاعدة سمبسون بصورة واسعة في التطبيقات.

وكي نشعر بزيادة الدقة ، فاننا نطبق كلا من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون في الحالة $n = 10$ على التكامل

$$I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

ونقارن القيمتين

$$0.746825 \quad \text{و} \quad 0.746211$$

بالقيمة الحقيقية 0.746824 (مقربة الى ستة أرقام عشرية) •

٦ - بين باستعمال المسألة ٤ أن حدي الخطأ في 0.746 211 في المسألة ٥ هما -0.001 667 و 0.000 614 ، بحيث أن

$$0.745 597 \leq I \leq 0.747 878.$$

٧ - إن قاعدة الثمانيات الثلاث هي

$$\int_0^3 x(t) dt \approx \frac{3h}{8} (x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3)$$

حيث $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$ • بين أنه يمكن الحصول على هذا الدستور اذا قربنا x على $[t_0, t_3]$ بحدودي من الدرجة الثالثة يساوي x في العقد t_0, t_1, t_2, t_3 • (ان القواعد الواردة في المسائل ٣ و ٧ هي الحدود الاولى في متتالية دساتير نيوتن - كوتس) •

٨ - لننظر في دستور المكاملة

$$\int_{-h}^h x(t) dt = 2hx(0) + r(x)$$

حيث r هو الخطأ • لنفرض أن $x \in C^4[-h, h]$ ، أي أن x دالة ذات مشتق

مستمر على $J = [-h, h]$ • بين أنه يمكن تقدير الخطأ بالمطابقة

$$|r(x)| \leq h^2 p(x)$$

حيث

$$p(x) = \max_{t \in J} |x'(t)|.$$

بين بأن P هو نصف نظيم على الفضاء المتجهي لتلك الدوال (راجع المسألة

١٢ من البند ٢-٣) •

٩ — اذا كانت x دالة حقيقية تحليلية ، فين أن

$$(16) \quad \int_{-h}^h x(t) dt = 2h \left(x(0) + x''(0) \frac{h^2}{3!} + x^{IV}(0) \frac{h^4}{5!} + \dots \right).$$

خذ للتكامل عبارة تقريبية من الشكل $2h(\alpha_{-1}x(-h) + \alpha_0x(0) + \alpha_1x(h))$ وعين

• $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}$ بحيث أن أكبر قدر ممكن من القوى h, h^2, \dots يتفق مع (16).
بين بأن هذا يعطي قاعدة سمبسون

$$\int_{-h}^h x(t) dt \approx \frac{h}{3} (x(-h) + 4x(0) + x(h)).$$

لماذا تبين هذه الطريقة بأن القاعدة تامة للحدوديات من الدرجة الثالثة •

١٠ — في برهاننا لمبرهنة فير شتراس في التقريب ، استخدمنا حدود معاملات

فورييه لدالة مستمرة ممثلة بدوال خطية • كيف يمكن الحصول على هذه

الحدود ؟

١٢-٤ مبرهنة التطبيق المفتوح

بحثنا في هذا الفصل في مبرهنة هان — باناخ ومبرهنة المحدودية المنتظمة .

وسنتقل الآن الى دراسة المبرهنة « الكبيرة » الثالثة في هذا الفصل ، ألا وهي

مبرهنة التطبيق المفتوح • تعنى هذه المبرهنة بالتطبيقات المفتوحة ، وهي التطبيقات

التي تكون صورة أي مجموعة مفتوحة وفقها مجموعة مفتوحة (التعريف و ارد بعد قليل) • واذا أعدنا إلى الذاكرة ما سبق وقلناه حول أهمية المجموعات المفتوحة (في البند ٣-١) ، فإننا ندرك بأن التطبيقات المفتوحة تتمتع بأهمية بالغة • وبصورة أكثر تحديدا ، فإن مبرهنة التطبيق المفتوح تقدم الشروط التي لو تحققت لغدا المؤثر الخطي المحدود تطبيقا مفتوحا • وكما هي الحال في مبرهنة المحدودية المنتظمة ، فإننا نحتاج ثانية إلى التمام ، وتقدم المبرهنة الحالية سببا آخر لكون فضاءات باناخ أجمع من الفضاءات المنتظمة غير التامة • كذلك ، فإن المبرهنة تحدد الشروط التي لو توفرت لكان عكس مؤثر خطي محدود محدودا أيضا • هذا ، وإن اثبات مبرهنة التطبيق المفتوح يستند إلى مبرهنة بير في الفئات التي سبق وأوردنا نصها وإثباتها في البند ٤-٧ •

سنبتدىء بتقديم مفهوم التطبيق المفتوح •

١-١٢-٤ تعريف (التطبيق المفتوح)

ليكن X و Y فضاءين مترين • عندئذ يسمى التطبيق $T: \mathfrak{D}(T) \rightarrow Y$ الذي ساحته $\mathfrak{D}(T)$ جزء من X تطبيقا مفتوحا إذا كانت صورة أي مجموعة مفتوحة في $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة مفتوحة في Y •

لاحظ أنه إذا كان التطبيق غير غامر ، فإنه يلزم التمييز بين قولنا بأن التطبيق مفتوح كتطبيق من $\mathfrak{D}(T)$

(أ) في Y ،

(ب) على مداه •

إن (ب) أضعف من (أ) • وعلى سبيل المثال ، فإذا كان $X \subset Y$ ، كان الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $x \mapsto x$ في X مفتوحا هو أن تكون X مجموعة جزئية مفتوحة في Y ، في حين أن التطبيق $x \mapsto x$ في X على مداه (الذي هو X) مفتوح في كل الحالات •

هذا ، وللتخلص من اللبس ، علينا أن نذكر استنادا إلى المبرهنة ١-٣-٤ ،

أن التطبيق المستمر $T: X \rightarrow Y$ يتمتع بخاصة كون الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في Y وفق T هي مجموعة مفتوحة في X ، وهذا لا يقتضي أن تكون صورة المجموعة المفتوحة في X وفق T مجموعة مفتوحة في Y • فمثلا ، ان التطبيق $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المحدد بالقاعدة $t \mapsto \sin t$ مستمر ، ومع ذلك فان صورة $(0, 2\pi)$ وفقه هي $[-1, 1]$ •

٢-١٢-٤ مبرهنة التطبيق المفتوح ومبرهنة العكس المحدود

ان المؤثر الخطي المحدود T من فضاء باناخ X على فضاء باناخ Y هو تطبيق مفتوح • وهكذا فاذا كان T متباينا وغامرا ، فان T^{-1} مستمر ومحدود •
ان البرهان ينتج مباشرة من التمهيدية التالية :

٢-١٢-٤ تمهيدية (الكرة الواحدة المفتوحة)

يتمتع المؤثر الخطي المحدود T من فضاء باناخ X على فضاء باناخ Y بخاصة كون الصورة $T(B_0)$ للكرة الواحدة المفتوحة $B_0 = B(0; 1) \subset X$ تحوي كرة مفتوحة حول النقطة 0 في Y •

البرهان :

سنقدم الاثبات وفق الخطوات التالية :

(أ) ثبت بأن لصاقة صورة الكرة المفتوحة $B_1 = B(0; \frac{1}{2})$ تحوي كرة مفتوحة B^* •

(ب) نبين بأن $\overline{T(B_n)}$ تحوي كرة مفتوحة V_n حول النقطة 0 في Y ، حيث $B_n = B(0; 2^{-n}) \subset X$ •

(ج) نبرهن على أن $T(B_0)$ تحوي كرة مفتوحة حول النقطة 0 في Y •
أما التفاصيل فهي على النحو التالي :

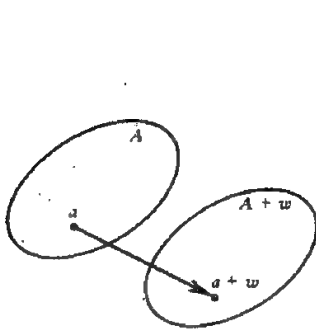
(أ) فيما يتعلق بالمجموعات الجزئية A من X ، فاننا سنستعمل الرمز

αA (حيث α عدد) و $A + w$ ($w \in X$) اللذين يعينان أن

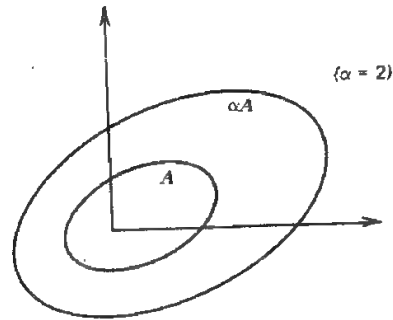
$$(1) \quad \alpha A = \{x \in X \mid x = \alpha a, a \in A\}$$

$$(2) \quad A + w = \{x \in X \mid x = a + w, a \in A\}$$

ونستعمل رمزين مماثلين للمجموعات الجزئية من Y .



الشكل (٤٩) إيضاح الدستور (2)



الشكل (٤٨) إيضاح الدستور (1)

لنأخذ الكرة المفتوحة $B_1 = B(0; \frac{1}{2}) \subset X$ ، ان كل عنصر مثبت x من X موجود في kB_1 ، حيث k عدد حقيقي كبير بقدر كاف $(k > 2 \|x\|)$. لذا فان

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

ولما كان T غامرا وخطيا فان

$$(3) \quad Y = T(X) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)}.$$

لاحظ أنه عندما أخذنا اللصاقات لم نصف نقاطا أخرى للاجتماع ، ذلك أن هذا الاجتماع سبق وساوى الفضاء Y بأكمله . وبما أن Y تام ، فانه ليس هزيلا في نفسه ، استنادا الى مبرهنة بير في الفئات ٤-٧-٢ . وبالتالي ، فاذا لاحظنا أن (3) مماثلة لـ (1) في ٤-٧-٢ ، فاننا نستنتج أن $\overline{kT(B_1)}$ يجب أن

تحتوي كرة مفتوحة ما • وهذا يقتضي أن $\overline{T(B_1)}$ تحتوي أيضا كرة مفتوحة ،
ولكن $B^* = B(y_0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)}$ يترتب على هذا أن

$$(4) \quad B^* - y_0 = B(0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0.$$

(ب) سنبرهن بأن $B^* - y_0 \subset \overline{T(B_0)}$ ، حيث B_0 واردة في نص المبرهنة •
سنقوم بهذا بإثبات أن [راجع (4)]

$$(5) \quad \overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)}.$$

ليكن $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ • عندئذ يكون $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$ ، ونذكر أن $y_0 \in \overline{T(B_1)}$
أيضا • واستنادا إلى (أ) من ١-٤-٦ فهناك

$$u_n \longrightarrow y + y_0 \quad \text{بحيث أن} \quad u_n = Tw_n \in T(B_1)$$

$$v_n \longrightarrow y_0 \quad \text{بحيث أن} \quad v_n = Tz_n \in T(B_1)$$

وبما أن w_n و z_n ينتميان إلى B_1 ، وأن نصف قطر B_1 هو $\frac{1}{2}$ ، فإن

$$\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

وبالتالي فإن $w_n - z_n \in B_0$ • ونرى من

$$T(w_n - z_n) = Tw_n - Tz_n = u_n - v_n \longrightarrow y$$

أن $y \in \overline{T(B_0)}$ • ولما كان $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ اختياريا ، فإن (5) صحيحة • وهكذا
فانه يترتب على (4) أن

$$(6) \quad B^* - y_0 = B(0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)}.$$

ليكن $B_n = B(0; 2^{-n}) \subset X$ • بما أن T خطي ، فإن $\overline{T(B_n)} = 2^{-n} \overline{T(B_0)}$ • لذا فانا
نستنتج من (6) أن

$$(7) \quad V_n = B(0; \varepsilon/2^n) \subset \overline{T(B_n)}.$$

(ج) سنبرهن أخيرا بأن

$$V_1 = B(0; \frac{1}{2}\varepsilon) \subset T(B_0)$$

وذلك بإثبات أن كل y من V_1 ينتمي الى $T(B_0)$. وهكذا لنفرض أن $y \in V_1$.
 نستنتج من (7) بفرض $n=1$ أن $V_1 \subset \overline{T(B_1)}$. لذا فإن $y \in \overline{T(B_1)}$ واعتمادا
 على (أ) من ١-٤-٦ ، فلا بد من وجود عنصر v في $T(B_1)$ قريب من y ، ولنفرض
 مثلا أن $\|y-v\| < \varepsilon/4$. وبما أن العلاقة $v \in T(B_1)$ تقتضي المساواة $v = Tx_1$ ،
 حيث x_1 عنصر من B_1 ، فإن

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

يترتب على هذا وعلى (7) بفرض $n=2$ ، أن $y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$. وكما في
 السابق ، فانا نستنتج أن ثمة عنصرا x_2 في B_2 بحيث أن

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

لذا فإن $y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$. وهكذا ، وفي الخطوة ذي الترتيب n ،
 يمكننا اختيار عنصر x_n من B_n بحيث يكون

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n Tx_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (8)$$

ليكن $z_n = x_1 + \dots + x_n$. بما أن $x_k \in B_k$ ، فإن $\|x_k\| < 1/2^k$. وينتج من هذا
 بفرض $n > m$ أن

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \rightarrow 0$$

عندما $m \rightarrow \infty$. لذا فإن (z_n) هي متتالية كوشي ، وبالتالي ، ولما كان X تاما ،
 فإن هذه المتتالية متقاربة ، ولنفترض مثلا أن $z_n \rightarrow x$. كذلك ، فإن $x \in B_0$
 لأن نصف قطر B_0 هو 1 وأن

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

وبما أن T مستمر ، فإن $Tz_n \rightarrow Tx$ ، وبين (8) عندئذ أن $Tx = y$. لذا فإن

■ • $y \in T(B_0)$

اثبات المبرهنة ٢-١٢-٤

سنبرهن بأنه إذا كانت A أي مجموعة مفتوحة في X ، فإن صورتها $T(A)$ مفتوحة في Y . سنعمل هذا بإثبات أنه أيا كان العنصر $y = Tx \in T(A)$ ، فإن المجموعة $T(A)$ تحوي كرة مفتوحة حول $y = Tx$.

ليكن $y = Tx \in T(A)$. لما كانت A مفتوحة ، فهي تحوي كرة مفتوحة مركزها x . لذا فإن $A - x$ تحوي كرة مفتوحة مركزها 0 ، ليكن r نصف قطر الكرة ، ولنضع $k = 1/r$ ، الامر الذي يعني أن $r = 1/k$. عندئذ تحوي $k(A - x)$ الكرة المفتوحة الواحدة $B(0; 1)$. تقتضي التمهيدية ٢-١٢-٤ الآن أن المجموعة $T(k(A - x)) = k[T(A) - Tx]$ تحوي كرة مفتوحة حول 0 ، وكذلك تفعل المجموعة $T(A) - Tx$. لذا فإن $T(A)$ تحوي كرة مفتوحة حول $Tx = y$. وبما أن العنصر y من $T(A)$ كان اختياريا فإن $T(A)$ مفتوحة .

وأخيرا ، فإذا كان $T^{-1}: Y \rightarrow X$ موجودا ، فإنه مستمر اعتمادا على المبرهنة ٢-٣-١ لان T مفتوح . وبما أن T^{-1} خطي استنادا الى المبرهنة ٢-٦-١٠ فإنه محدود بناء على المبرهنة ٢-٧-٩ ■

مسائل

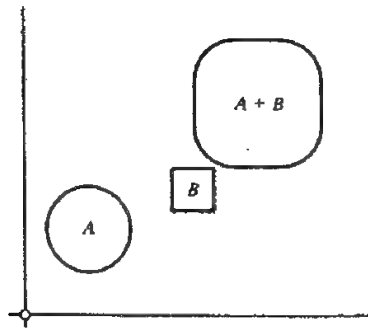
١ - بين بأن $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة $(\xi_1) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$ مفتوح . هل التطبيق $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المحدد بالقاعدة $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$ تطبيق مفتوح ؟

٢ - بين بأن صور المجموعات المغلقة وفق تطبيق مفتوح ليست بالضرورة مجموعات مغلقة .

٣ - إذا وسعنا (1) و (2) ، فيمكن تعريف

$$A+B=\{x \in X \mid x=a+b, a \in A, b \in B\},$$

حيث A و B مجموعتان جزئيتان من X ، وكي يصبح هذا الرمز مألوفاً لديك جد αA و $A+w$ و $A+A$ ، بفرض أن $A=\{1,2,3,4\}$ ، اشرح الشكل ٥٠ .



الشكل (٥٠) . المجموعات A و B و $A+B$ في المستوي

٤ - بين بأن المتباينة الواردة في (٩) تامة (أي أنه لا يمكن أن نضع عوضاً عن $<$ الرمز \leq) .

٥ - ليكن X فضاء منظماً نقاطه متتاليات من الأعداد العقدية $x=(\xi_i)$ بحيث تكون حدود كل متتالية أصفاراً باستثناء عدد منته من هذه الحدود ، وحيث النظيم معرف بالمساواة $\|x\|=\sup |\xi_i|$. ليكن $T: X \rightarrow X$ معرفاً كما يلي :

$$y=Tx=\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \dots\right).$$

أثبت أن T خطي ومحدود ، في حين أن T^{-1} ليس محدوداً . هل هذا يناقض ٤-١٢-٢ ؟

٦ - ليكن X و Y فضاءي باناخ ، وليكن $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا متباينا وغامرا . بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ محدودا هو أن يكون $\mathcal{R}(T)$ مغلقا في Y .

٧ - ليكن $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءا باناخ . فإذا كان T متباينا وغامرا ، فأثبت وجود عددتين حقيقيتين موجبتين a و b بحيث أن $a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|$ أيأ كان x من X .

٨ - (النظام المتكافئة) . ليكن $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمين على فضاء متجهي X بحيث يكون الفضاءان $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ و $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ تامين . فإذا اقتضى $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ دوما أن $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$ ، فبين أن التقارب في X_1 يقتضي التقارب في X_2 ، وبالعكس . بين وجود عددتين موجبتين a و b بحيث أنه أيأ كان x من X فإن

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

(لاحظ أن هذين النظيمين متكافئان ، راجع التعريف ٢-٤-٤) .

٩ - ليكن $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ و $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ فضاءي باناخ . فإذا وجد ثابت c بحيث أن $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ أيأ كان x من X ، فبين وجود ثابت k بحيث أن $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$ أيأ كان x من X (وبالتالي فإن النظيمين متكافئان ، راجع التعريف ٢-٤-٤) .

١٠ - نعلم من البند ١-٣ أن المجموعة \mathcal{T} الحاوية المجموعات الجزئية المفتوحة في فضاء ميري X تسمى **طوبولوجيا على X** . وبالتالي فكل تنظيم على فضاء متجهي X يعين طوبولوجيا على X . فإذا كان لدينا نظيمان على X بحيث يكون $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ و $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ فضاءي باناخ ، وكانت الطوبولوجيا \mathcal{T}_1 المعرفة بـ $\|\cdot\|_1$ تحوي الطوبولوجيا \mathcal{T}_2 المعرفة بـ $\|\cdot\|_2$ ، فبين أن

• $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$

١٣-٤ المؤثرات الخطية المغلقة مبرهنة البيان المغلق

ليست كل المؤثرات الخطية الهامة من الوجهة التطبيقية محدودة • وعلى سبيل المثال ، فان المؤثر التفاضلي في ٢-٧-٥ غير محدود ، كما أننا كثيرا ما نتعامل في ميكانيكا الكم وفي تطبيقات أخرى مع مؤثرات غير محدودة • هذا ، وان كل المؤثرات الخطية التي يمكن للباحثين التحليليين استعمالها في الواقع هي تلك المسماة بالمؤثرات الخطية المغلقة • وسنعرف في هذا البند المؤثرات الخطية المغلقة على الفضاءات المنظمة ، وندرس بعضا من سماتها ، وبخاصة ما يتعلق بمبرهنة البيان المغلق الهامة ، والتي تبحث في الشروط الكافية التي لو تحققت لغدا المؤثر الخطي المغلق على فضاء باناخ محدودا •

هذا وسنورد في الفصل العاشر دراسة أكثر تفصيلا للمؤثرات المغلقة ومؤثرات أخرى غير محدودة في فضاء هلبرت ، كما سنورد في الفصل الحادي عشر تطبيقات لهذه المؤثرات في ميكانيكا الكم •
لنبتدىء بالتعريف التالي •

١-١٣-٤ تعريف (المؤثر الخطي المغلق)

ليكن X و Y فضاءين منظمين وليكن $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا ساحته $\mathcal{D}(T)$ مجموعة جزئية من X • عندئذ يسمى T مؤثرا خطيا مغلقا اذا كان بيانه

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{D}(T), y = Tx\}$$

مغلقا في الفضاء المنظم $X \times Y$ ، حيث تعرف العمليتان الجبريتان اللفظة المتجهي في $X \times Y$ بالطريقة المألوفة ، أي أن

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

(α عدد) ، وحيث يعرف التنظيم على $X \times Y$ بالمساواة *

$$(1) \quad \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

ما هي الشروط التي لو تحققت لكان المؤثر الخطي المعلق محدودا ؟ ان
الاجابة عن هذا السؤال تقدمه المبرهنة الهامة التالية .

٢-١٣-٤ مبرهنة البيان المعلق

ليكن X و Y فضاءي باناخ ، وليكن $T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا ،
حيث $\mathcal{D}(T)$ جزء من X . عندئذ اذا كانت $\mathcal{D}(T)$ مغلقة في X ، فان المؤثر T يكون
محدودا .

البرهان :

سنبين أولا أن المجموعة $X \times Y$ المزودة بالتنظيم (1) تشكل فضاء تاما .
لتكن (z_n) متتالية كوشي في $X \times Y$ ، حيث $z_n = (x_n, y_n)$. عندئذ يوجد لكل
عدد موجب ε عدد صحيح N بحيث يكون

$$(2) \quad \|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

لذا فان كلا من (x_n) و (y_n) متتاليتان لكوشي في X و Y تباعا ، كما أن هاتين
المتتاليتين متقاربتان ، وليكن مثالا $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ ، لان X و Y تامان .
وهذا يقتضي أن يكون $z = (x, y)$ ، ذلك أنه يترتب على (2) عندما
 $m \longrightarrow \infty$ أن $\|z_n - z\| \leq \varepsilon$ حيث $n > N$. وبما أن متتالية كوشي (z_n) كانت
اختيارية ، فان $X \times Y$ تام .

ان البيان $\mathcal{G}(T)$ مغلق في $X \times Y$ فرضا و $\mathcal{D}(T)$ مغلقة في X ، لذا فان
 $\mathcal{G}(T)$ و $\mathcal{D}(T)$ تامان وفق ١-٤-٧ . لنأخذ الآن التطبيق

$$P: \mathcal{G}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$$

$$(x, Tx) \longmapsto x.$$

* لمزيد من النظام ، انظر الى المسألة ٢ .

ان P خطي . كذلك فان P محدود لان

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|.$$

ان P متباين وغامر أيضا ، وفعلًا فان التطبيق العكسي هو

$$P^{-1}: \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{G}(T)$$

$$x \longmapsto (x, Tx).$$

بما أن $\mathcal{G}(T)$ و $\mathcal{D}(T)$ تامان ، فيمكننا تطبيق مبرهنة العكس المحدود ٤-١٢-٢ .
ونجد أن P^{-1} محدود ، ولنكتب مثلاً أن $\|(x, Tx)\| \leq b\|x\|$ ، حيث b عدد ما و
أي عنصر من $\mathcal{D}(T)$. لذا فان T محدود لان

$$\|Tx\| \leq \|Tx\| + \|x\| = \|(x, Tx)\| \leq b\|x\|$$

أيًا كان x من $\mathcal{D}(T)$ ■ •

وبالتعريف ، فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $\mathcal{G}(T)$ مغلقاً هو أن
تقتضي العلاقة $z = (x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ أن يكون $z \in \mathcal{G}(T)$. نستنتج من الشق (أ) من
المبرهنة ٤-١-٦ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $z \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ هو أن توجد
 $z_n = (x_n, Tx_n) \in \mathcal{G}(T)$ بحيث أن $z_n \longrightarrow z$ ، وبالتالي يكون

$$(3) \quad x_n \longrightarrow x, \quad Tx_n \longrightarrow y;$$

ويكون الشرط اللازم والكافي كي تتحقق العلاقة $z = (x, y) \in \mathcal{G}(T)$ هو أن
يكون $x \in \mathcal{D}(T)$ و $y = Tx$. وهذا يثبت المعيار المفيد التالي الذي يعبر عن
خاصة غالباً ما تؤخذ كتعريف لاتغلاق مؤثر خطي .

٤-١٣-٣ مبرهنة (المؤثر الخطي المغلق)

ليكن $T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً ، حيث $\mathcal{D}(T) \subset X$ و Y فضاءان
منظمان . عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون T مغلقاً هو أن تتحقق

الخاصة التالية : اذا كان $x_n \rightarrow x$ ، حيث $x_n \in \mathcal{D}(T)$ وكان $Tx_n \rightarrow y$ ، فإن $Tx = y$ و $x \in \mathcal{D}(T)$.

لاحظ جيدا أن هذه الخاصة تختلف عن الخاصة التالية للمؤثر الخطي المحدود : اذا كان مؤثر خطي T محدودا ، وبالتالي مستمرا ، وكانت (x_n) متتالية في $\mathcal{D}(T)$ متقاربة في $\mathcal{D}(T)$ ، فإن (Tx_n) تكون أيضا متقاربة ، راجع ١-٤-٨ . ليس من الضروري أن تكون هذه الخاصة صحيحة في حال مؤثر خطي مغلق ، الا أنه اذا كان T مغلقا وكانت متتاليتان (x_n) و (\tilde{x}_n) في ساحة T متقاربتين ولهما نهاية واحدة ، وإذا كانت المتتاليتان الموافقتان (Tx_n) و $(T\tilde{x}_n)$ متقاربتين كلاهما ، فإن للمتتاليتين الأخيرتين نهاية واحدة . (راجع المسألة ٦) .

١-١٢-٤ مثال (المؤثر التفاضلي)

ليكن $X = C[0, 1]$ ، وليكن

$$T: \mathcal{D}(T) \rightarrow X$$

$$x \mapsto x'$$

حيث ترمز الفتحة الى عملية الاشتقاق ، وحيث $\mathcal{D}(T)$ هو الفضاء الجزئي المؤلف من الدوال x في X التي مشتقاتها مستمرة . عندئذ يكون T غير محدود . ولكنه مغلق .

البرهان :

نرى من ٢-٧-٥ أن T غير محدود . سنثبت أن T مغلق بتطبيق البرهنة ١-١٣-٣ . لتكن (x_n) متتالية في $\mathcal{D}(T)$ بحيث تكون المتتاليتان (x_n) و (Tx_n) متقاربتين ، وليكن مثلا

$$x_n \rightarrow x \quad \text{و} \quad Tx_n = x'_n \rightarrow y.$$

بما أن التقارب في $C[0, 1]$ هو تقارب منتظم على $[0, 1]$ ، فإننا نستنتج من $x'_n \rightarrow y$ أن

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} x_n'(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t x_n'(\tau) d\tau = x(t) - x(0),$$

أي أن

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

وبين هذا أن $x \in \mathcal{D}(T)$ وأن $x' = y$ • بعد هذا تقتضي المبرهنة ٤-١٣-٣ أن T مغلق • ■

وتجدر الإشارة في هذا المثال الى أن $\mathcal{D}(T)$ ليست مغلقة في X : لانها لو كانت مغلقة ، لكان T محدودا بناء على مبرهنة البيان المغلق •

الانغلاق لا يقتضي محدودية مؤثر خطي • وبالعكس ، فان المحدودية لا تقتضي الانغلاق •

البرهان :

الدعوى الاولى موضحة بالمثال ٤-١٣-٤ • أما الدعوى الثانية : فنوضحها بالمثال التالي : ليكن $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{D}(T) \subset X$ المؤثر المطابق على $\mathcal{D}(T)$ ، حيث $\mathcal{D}(T)$ فضاء جزئي تماما وكثيف في فضاء منظم X • عندئذ فان كون T خطيا ومحدودا أمر واضح للعيان • الا أن T ليس مغلقا ، وهذا ينتج مباشرة من المبرهنة ٤-١٣-٣ اذا أخذنا عنصرا x من $X - \mathcal{D}(T)$ ومتتالية (x_n) في $\mathcal{D}(T)$ تقارب من x • ■

ان مناقشتنا الحالية تشير الى أنه فيما يتعلق بالمؤثرات غير المحدودة ، فان تحديد الساحات ومسائل التمديد تلعب دورا أساسيا • وفعلا ، فان هذا صحيح • وسنراه بزيد من التفصيل في الفصل العاشر • وتجدر بنا ملاحظة أن الدعوى التي أثبتناها توا سلبية في جوهرها ، أما في الجانب الايجابي ، فانه ترد التمهيدية التالية :

١٣-٤-٥ تمهيدية (المؤثر المغلق)

ليكن $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ساحته $\mathcal{D}(T)$ جزء من X ، حيث X و Y فضاءان منظمان . عندئذ نجد ما يلي :

- (أ) إذا كانت $\mathcal{D}(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X ، فإن T مغلق .
 (ب) إذا كان T مغلقا و Y تاما ، فإن $\mathcal{D}(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X .

البرهان :

(أ) إذا كانت (x_n) متتالية في $\mathcal{D}(T)$ ومتقاربة من x مثلاً ، وبحيث تكون المتتالية (Tx_n) متقاربة كذلك ، فإن $x \in \overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{D}(T)$ ذلك أن $\mathcal{D}(T)$ مغلقة ، كما أن $Tx_n \rightarrow Tx$ لكون T مستمرا . ان T هنا مغلق بناء على البرهنة ٣-١٣-٤ .

(ب) يوجد لكل x من $\overline{\mathcal{D}(T)}$ متتالية (x_n) في $\mathcal{D}(T)$ بحيث يكون $x_n \rightarrow x$ ، راجع ١-٤-٦ . وبما أن T محدود ، فإن

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

وهذا يبين أن (Tx_n) هي متتالية كوشي . ولما كان Y تاما ، فإن (Tx_n) تتقارب وليكن مثلاً $Tx_n \rightarrow y \in Y$. وبما أن T مغلق ، فإن $x \in \mathcal{D}(T)$ استنادا الى ٣-١٣-٤ (كما أن $Tx = y$) . لذا فإن $\mathcal{D}(T)$ مغلقة لان النقطة x من $\overline{\mathcal{D}(T)}$ اختيارية ■

مسائل

- ١ - برهن بأن (1) تحدد نظيما على $X \times Y$.
- ٢ - ثمة نظائم أخرى تعرف على الجداء $X \times Y$ للفضاءين المنظمين X و Y ، نذكر منها .

$$\|(x, y)\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$$

و

$$\|(x, y)\|_0 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}.$$

تحقق من أن هاتين المساواتين تحددان نظمين •

٣ — أثبت أن البيان $\mathcal{B}(T)$ لمؤثر خطي $T: X \rightarrow Y$ هو فضاء خطي جزئي من $X \times Y$ •

٤ — إذا كان X و Y في التعريف ٤-١٣-١ فضاءي باناخ ، فين أن الجنداء $V = X \times Y$ المزود بالنظيم المعرف في (١) هو فضاء باناخ •

٥ — (العكس) إذا كان العكس T^{-1} لمؤثر خطي مغلق موجودا ، فين أن T^{-1} مؤثر خطي مغلق •

٦ — ليكن T مؤثرا خطيا مغلقا • فإذا كانت المتتاليتان (x_n) و (\bar{x}_n) في $\mathcal{B}(T)$ متقاربتين من نهاية واحدة x ، وكان كل من (Tx_n) و $(T\bar{x}_n)$ متقاربة ، فين أن للمتتاليتين (Tx_n) و $(T\bar{x}_n)$ نهاية واحدة •

٧ — أثبت صحة الدعوى الثانية من المبرهنة ٤-١٢-٢ انطلاقا على مبرهنة البيان المغلق •

٨ — ليكن X و Y فضاءين منظمين ، وليكن $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا •
(أ) بين أن الصورة A لمجموعة جزئية متراصة C في X مغلقة في Y •
(ب) بين بأن الصورة العكسية B لمجموعة جزئية متراصة K في Y مغلقة في X • (راجع التعريف ٢-٥-١) •

٩ — إذا كان $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا ، حيث X و Y فضاءان منظمان و Y متراس • فين أن T محدود •

١٠ — ليكن X و Y فضاءين منظمين و X متراسا • فإذا كان $T: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا متباينا وغامرا ، فين أن T^{-1} محدود •

١١- (الفضاء الصفري) بين بأن الفضاء الصفري $N(T)$ للمؤثر الخطي المغلق $T: X \rightarrow Y$ هو فضاء جزئي مغلق في X .

١٢- ليكن X و Y فضاءين منظمين . فإذا كان $T_1: X \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا و $T_2 \in B(X, Y)$ ، فين أن $T_1 + T_2$ مؤثر خطي مغلق .

١٣- ليكن T مؤثرا خطيا مغلقا ساحته $\mathfrak{D}(T)$ جزء من فضاء باناخ X ومداه $\mathfrak{R}(T)$ جزء من فضاء منظم Y . فإذا كان T^{-1} موجودا ومحدودا ، فيبين أن $\mathfrak{R}(T)$ مغلق .

١٤- لنفترض أن حدود المتسلسلة $u_1 + u_2 + \dots$ دوال مشتقاتها مستمرة على الفترة $J = [0, 1]$ ، وأن المتسلسلة متقاربة بانتظام على J ومجموعها x . لنفترض أيضا أن $u_1' + u_2' + \dots$ تتقارب بانتظام أيضا على J . برهن عندئذ أن للدالة x مشتقا مستمرا على $(0, 1)$ ، وأن $x' = u_1' + u_2' + \dots$.

١٥- (التمديد المغلق) ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \rightarrow Y$ مؤثرا خطيا بيانه $\mathfrak{G}(T)$ ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ جزء من X ، وحيث X و Y فضاء باناخ . بين بأن الشرط اللازم والكافي كي يوجد لـ T ممدد \bar{T} ، حيث \bar{T} مؤثر خطي مغلق بيانه $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ ، هو أن $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ يحتوي عنصرا من الشكل $(0, y)$ ، حيث $y \neq 0$.

الفصل الخامس

مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

لاستيعاب مضمون هذا الفصل يكفي قراءة الفصل الأول (دون الفصلين الثاني والرابع) ، وبالتالي فمن الممكن دراسة الفصل الحالي بعد الفصل الأول مباشرة ان شاء القارئ .

ان أهمية مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ تكمن في أنها تشكل مصدرا لمبرهنات الوجود والوحدانية في العديد من فروع التحليل . وبهذا المعنى ، فان هذه المبرهنة توضح الى حد بعيد القوة الموحدة لاساليب التحليل الدالي والفائدة المترتبة على مبرهنات النقطة الثابتة في التحليل .

توجيه مختصر حول المضمون الرئيسي

ان مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ أو مبرهنة التقليل ١-٥-٢ تتعلق بتطبيقات معينة (تسمى تقليليات ، راجع ١-٥-١) لفضاء مترى تام في نفسه . وهي تورد الشروط الكافية لوجود ووحدانية نقطة ثابتة (وهي النقطة التي تكون صورتها وفق التطبيق هي النقطة نفسها) . وتمدنا هذه المبرهنة كذلك بطريقة تكريرية يمكننا بواسطتها الحصول على تقريبات للنقطة الثابتة وعلى

حدود الخطأ (راجع ١٥-٣) • وستناول في هذا الفصل ثلاثة حقول هامة لتطبيق هذه المبرهنة ، ألا وهي :

- المعادلات الجبرية الخطية (البند ٢-٥) ،
- والمعادلات التفاضلية العادية (البند ٣-٥) ،
- والمعادلات التكاملية (البند ٤-٥) •

وثمة تطبيقات أخرى (في المعادلات التفاضلية الجزئية مثلا) والتي نحتاج لدراستها متطلبات أخرى •

١-٥ مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

النقطة الثابتة لتطبيق $T: X \rightarrow X$ لمجموعة X في نفسها هي نقطة x من X تكون صورتها وفق التطبيق النقطة x ذاتها (بمعنى أن x « تبقى ثابتة » وفق T) ، أي أن

$$Tx = x,$$

الامر الذي يعني بأن الصورة Tx تتطابق والعنصر x •

وعلى سبيل المثال ، فلا يوجد للانسحاب نقاط ثابتة ، أما دوران المستوى فله نقطة ثابتة وحيدة (هي مركز الدوران) ، وأما التطبيق $x \mapsto x^2$ للمجموعة \mathbb{R} في نفسها فله نقطتان ثابتتان (٠ و ١) ، وأما الإسقاط $(\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1$ لـ \mathbb{R}^2 على المحور ξ_1 فله عدد غير منته من النقاط الثابتة (هي نقاط المحور ξ_1 جميعا) •

ان مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ ، والتي سندرجها بعد قليل ، هي مبرهنة حول وجود ووحدانية نقاط ثابتة لتطبيقات معينة ، وهي ، فضلا عن ذلك . تمدنا بالاجراءات اللازمة للحصول على تقريبات أفضل للنقطة الثابتة (أي حل المسألة العملية) • يدعى هذا الاجراء **تكريرا** ويعرف بأنه الطريقة التي تتم بأن نختار عنصرا x_0 في مجموعة معطاة ، ونحسب بالتدريج متتالية x_0, x_1, x_2, \dots من علاقة بالشكل

$$x_{n+1} = Tx_n$$

$$n = 0, 1, 2, \dots;$$

أي أننا نختار عنصرا كينيا x_0 ، ونعين على التوالي العناصر $x_1 = Tx_0$ ، $x_2 = Tx_1$ ،
 و *

ان الاجراءات التكريرية تستعمل في كل فرع تقريبا من فروع الرياضيات التطبيقية ، كما أن براهين التقارب وتقديرات الخطأ تتم على الاغلب باستعمال مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (أو مبرهنات أعقد في النقطة الثابتة) . وتعطي مبرهنة باناخ الشروط الكافية لوجود (ووحداية) نقطة ثابتة لصف من التطبيقات تسمى تقلصات ، نعرفها على النحو التالي .

١-١-٥ تعريف (التقليل)

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متريا . يدعى التطبيق $T: X \rightarrow X$ تقلصا على X اذا وجد عدد حقيقي موجب α وأصغر من 1 بحيث أنه اذا كان x, y عنصرين من X فان

$$(1) \quad d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (\alpha < 1).$$

ويمتني هذا هندسيا أن لاي نقطتين x و y صورتين أقرب احدهما الى الاخرى من قرب النقطتين x و y من بعضهما ، وبعبارة أدق ، فان النسبة $d(Tx, Ty)/d(x, y)$ لا يمكن أن تتجاوز عددا ثابتا α أصغر من 1 .

٢-١-٥ مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (مبرهنة التقليل)

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متريا ، حيث $X \neq \emptyset$. فاذا كان X تاما وكان $T: X \rightarrow X$ تقلصا على X ، فانه يوجد لـ T نقطة ثابتة واحدة بالضبط .

البرهان :

سننشئ متتالية (x_n) ونبين بأنها متتالية كوشي ، الامر الذي يعني أنها متقاربة نظرا لكون X فضاء تاما ، وبعدئذ نبرهن بأن نهايتها x نقطة ثابتة لـ T وأنه لا يوجد لـ T نقاط ثابتة أخرى . أما فكرة البرهان فهي كما يلي :

نختار أي عنصر x_0 من X ، ونعرف « المتتالية التكريرية » (x_n) على النحو التالي :

$$(2) \quad x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \quad \dots, \quad x_n = T^n x_0, \quad \dots$$

من الواضح أن هذه هي متتالية صور x_0 وفق الاستعمال المتكرر لـ T • سنبين أن (x_n) هي متتالية كوشي • لدينا استنادا الى (1) و (2) التالي

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ (3) \quad &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\dots \leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

وبالتالي فاننا نجد استنادا الى متباينة المثلث والى الدستور الذي يعطي مجموع الحدود الاولى من متسلسلة هندسية أنه اذا كان $n > m$ فان

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

وبما أن $0 < \alpha < 1$ ، فاننا نجد في البسط أن $1 - \alpha^{n-m} < 1$ ، ويكون بالتالي

$$(4) \quad d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad (n > m).$$

ولما كان $0 < \alpha < 1$ وكان $d(x_0, x_1)$ عددا ثابتا ، فمن الممكن جعل الطرف الايمن من المتباينة السابقة صغيرا بقدر ما نشاء لدى أخذ m كبيرا بقدر كاف (وأخذ $n > m$) • وبالتالي فان (x_m) هي متتالية كوشي • وبما أن X تام ، فان (x_m) متقاربة ، وليكن مثلا $x_m \rightarrow x$ • سنبين الآن أن هذه النهاية x هي نقطة ثابتة للتطبيق T •

يترتب على متباينة المثلث وعلى (1) أن

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx)$$

$$\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

وبما أنه يمكن جعل المجموع الوارد في السطر الثاني أصغر من أي عدد موجب ε معطى سلفا ، لان $x_m \rightarrow x$ ، فائنا نستنتج أن $d(x, Tx) = 0$ ، الامر الذي يترتب عليه أن $x = Tx$ استنادا الى (٢م) من البند ١-١ . لذا فان x نقطة ثابتة لـ T .

ان x هي النقطة الثابتة الوحيدة للتطبيق T ، ذلك أنه يترتب على $Tx = x$ و $T\bar{x} = \bar{x}$ استنادا الى (1) أن

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leq \alpha d(x, \bar{x})$$

وهذا يقتضي أن يكون $d(x, \bar{x}) = 0$ نظرا لان $\alpha < 1$. وبالتالي فان $x = \bar{x}$ استنادا الى (٢م) ، وبذا يكتمل اثبات المبرهنة . ■

٣-١-٥ نتيجة (التكرير ، حدا الخطا)

إذا روعيت شروط المبرهنة ٣-١-٥ فان المتتالية التكريرية (2) ، بفرض x_0 عنصرا اختياريا من X ، تتقارب من النقطة الثابتة الوحيدة x لـ T . اما تقديرا الخطا فهما التقدير السابق

$$(5) \quad d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

والتقدير اللاحق .

$$(6) \quad d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m)$$

البرهان :

ان الدعوى الاولى جلية من البرهان السابق ، ذلك أن المتباينة (5) تنبع من (4) بجعل $n \rightarrow \infty$. لننتقل الآن الى استنتاج (6) . اذا أخذنا $m=1$

واستعاضنا عن y_0 بـ x_0 وعن y_1 بـ x_1 فاننا نجد انطلاقا من (5) أن

$$d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1).$$

فاذا وضعنا $y_0 = x_{m-1}$ ، فاننا نجد $y_1 = Ty_0 = x_m$ ونحصل على (6) • ■

ان حد الخطأ السابق (5) يمكن أن يستعمل في بداية حساب تقدير عدد الخطوات الضرورية للحصول على دقة معطاة • أما (6) فيمكن أن يستعمل في المراحل المتوسطة أو في نهاية الحساب ، ودقته تساوي على الاقل دقة (5) ، وقد تكون أفضل ، راجع المسألة ٨ •

ان هذا الوضع من وجهة نظر الرياضيات التطبيقية لا يزال غير مرض تماما ، ذلك أنه كثيرا ما يحدث أن يكون التطبيق T تقليصا ليس على الفضاء X بأكمله ، وانما على مجموعة جزئية Y من X • بيد أنه اذا كانت Y مغلقة ، فهي تامة (وفق المبرهنة ١-٤-٧) وبالتالي يوجد لـ T نقطة ثابتة x في Y ، كما أن $x_m \rightarrow x$ كما في السابق ، شريطة فرض قيد مناسب على اختيار x_0 بحيث تبقى الحدود x_m في Y • ونورد في هذا الصدد نتيجة نموذجية ومفيدة من الوجهة العملية على النحو التالي •

١-٥-٤ مبرهنة (التقليل على كرة)

ليكن T تطبيقا لفضاء متري تام $X = (X, d)$ في نفسه ، لنفترض ان T تقلص على كرة مغلقة $Y = \{x \mid d(x, x_0) \leq r\}$ ، اي ان T يحقق (1) ايا كان x و y من Y • لنفترض فضلا عن ذلك ان

$$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r. \quad (7)$$

عندئذ تتقارب المتتالية التكريرية (2) من نقطة x في Y ان x هذه هي نقطة ثابتة لـ T ، كما انها النقطة الثابتة الوحيدة لـ T في Y •

البرهان :

علينا فقط اثبات أن كل الحدود x_m والنقطة x كذلك تقع في Y • اذا وضعنا

$m=0$ في (4) وغيرنا n الى m واستعملنا (7) ، فاننا نجد أن

$$d(x_0, x_m) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < r.$$

لذا فان كل الحدود x_m واقعة في Y . كذلك فان $x \in Y$ ذلك أن $x_m \rightarrow x$ وأن Y مغلقة . وهكذا فان صحة المبرهنة تترتب الآن من برهان مبرهنة باناخ ١-٥-٢ . ويمكن للقارئ ايراد برهان بسيط للتمهيدية التالية التي سنستعملها في أبحاثنا القادمة .

١-٥-٥ تمهيدية (الاستمرار)

ان التقليص T على فضاء متري X هو تطبيق مستمر

مسائل

١ - أعط أمثلة أخرى على تطبيقات في الهندسة الابتدائية لها (أ) نقطة ثابتة وحيدة ، (ب) عدد غير منته من النقاط الثابتة .

٢ - ليكن $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ ، وليكن $T: X \rightarrow X$ تطبيقا معرفا بالمساواة $Tx = x/2 + x^{-1}$. بين أن T تقليص ، وأوجد أصغر قيمة ممكنة لـ α .

٣ - بين بايراد مثال أن التمام في المبرهنة ١-٥-٢ شرط ضروري ولا يمكن حذفه .

٤ - من المهم في مبرهنة باناخ ١-٥-٢ أن الشرط (1) لا يمكن الاستعاضة عنه بالمتباينة $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ عندما يكون $x \neq y$. وللتأكد من هذا الامر نأخذ المجموعة $X = \{x \mid 1 \leq x < +\infty\}$ المزودة بمقصور المتري المألوف على المحور الحقيقي ، والتطبيق $T: X \rightarrow X$ المعرف بالشكل $x \mapsto x + x^{-1}$. بين أن $|Tx - Ty| < |x - y|$ عندما يكون $x \neq y$ ، في حين أنه لا يوجد للتطبيق نقاط ثابتة .

٥ - إذا حقق التطبيق $T: X \rightarrow X$ الشرط $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ عندما يكون $x \neq y$ ، وكان لـ T نقطة ثابتة ، فبين أن النقطة الثابتة وحيدة . ان (X, d) هنا هو فضاء مترى .

٦ - إذا كان T تقليصا ، فبين أن T^n (حيث $n \in \mathbb{N}$) تقليص . أثبت أنه إذا كان T^n تقليصا (حيث $n > 1$) ، فليس من الضروري أن يكون T تقليصا .

٧ - أثبت صحة التمهيدية ٥-١-٥ .

٨ - بين بأن حدود الخطأ المعطاة بـ (5) تشكل متتالية رتيبة متناقصة تماما . أثبت أن جودة (6) هي على الاقل مثل جودة (5) .

٩ - بين أنه في حالة المبرهنة ٥-١-٤ ، فإننا نجد تقدير الخطأ السابق $d(x_m, x) < \alpha^m r$ وتقدير الخطأ اللاحق (6) .

١٠ - هنالك شرط كاف مألوف في التحليل لتقارب تكرير $x_n = g(x_{n-1})$ هو أن يكون لـ g مشتق مستمر وأن يكون

$$|g'(x)| \leq \alpha < 1.$$

تحقق من هذا الامر باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ .

١١ - للحصول على حلول عددية تقريبية لمعادلة معطاة $f(x) = 0$ ، يمكن تحويل المعادلة الى الشكل $x = g(x)$ ، واختيار قيمة ابتدائية x_0 وحساب

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots$$

لنفترض أنه يوجد لـ g مشتق مستمر على فترة ما $J = [x_0 - r, x_0 + r]$ ، وأنه يحقق الشرط $|g'(x)| \leq \alpha < 1$ على J وكذلك الشرط

$$|g(x_0) - x_0| < (1 - \alpha)r.$$

بين عندئذ أنه يوجد للمعادلة $x = g(x)$ حل وحيد x على J ، وأن المتتالية التكريرية (x_n) تتقارب من هذا الحل ، وأننا نجد تقديري الخطأ التاليين

$$|x - x_m| < \alpha^m r, \quad |x - x_m| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_m - x_{m-1}|.$$

١٢- أنشئ طريقة تكريرية لحل المعادلة $f(x)=0$ بالافادة من مبرهنة باناخ

١-٢ إذا وجد مشتق مستمر لـ f على الفترة $J=[a, b]$ ، وكان

$f(a)<0$ و $f(b)>0$ و $f'(x) \leq k_2$ و $0 < k_1 \leq f'(x)$ ($x \in J$) استعمل $g(x)=x-\lambda f(x)$

بقية مناسبة لـ λ .

١٣- سنورد طريقة تكريرية في حل $f(x)=x^3+x-1=0$ على النحو التالي :

(أ) بين أن احد الامكانات هو

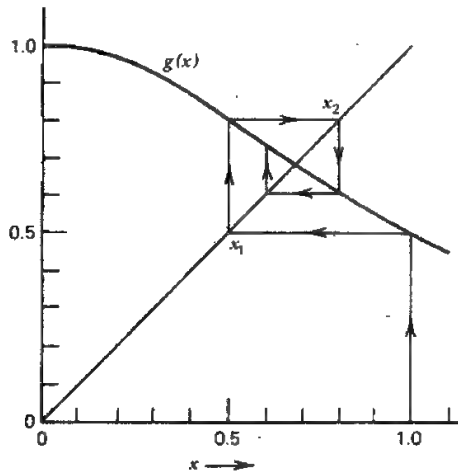
$$x_n = g(x_{n-1}) = (1+x_{n-1}^2)^{-1}.$$

اختر $x_0=1$ وانجز ثلاث خطوات . هل $|g'(x)| < 1$ ؟ (راجع المسألة ١٠) .

بين أنه يمكن شرح التكرير بالشكل ٥١ . (ب) قدر الاخطاء باستعمال (5) .

(ج) يمكن كتابة $f(x)=0$ بالشكل $x=1-x^3$. هل هذه الصيغة مناسبة

للتكرير ؟ جرب $x_0=1$ و $x_0=0.5$ و $x_0=2$ ، وانظر فيما يحدث .



الشكل (٥١) . التكرير في الشق (أ) من المسألة ١٣

١٤- بين أن ثمة طريقة تكرير أخرى للمعادلة الواردة في المسألة ١٣ هي

$$x_n = x_{n-1}^{1/2} (1+x_{n-1}^2)^{-1/2}.$$

اختر $x_0=1$ • عين x_1 و x_2 و x_3 • ما هو سبب التقارب السريع ؟ (الجذر الحقيقي هو 0.682 328 مقربا الى ستة أرقام عشرية) •

١٥- (طريقة نيوتن) لتكن f دالة حقيقية مشتقاها الاول والثاني مستمران على الفترة $[a, b]$ ، وليكن ξ صفرا بسيطا ل f في (a, b) • بين بأن طريقة نيوتن المعرفة كالتالي

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

هي تقليص في جوار ما للنقطة ξ (بحيث تتقارب المتتالية التكريرية من ξ أيا كانت x_0 القريبة بقدر كاف من ξ) •

١٦- (الجذر التربيعي) • أثبت أن

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

هو تكرير لحساب الجذر التربيعي لعدد موجب معطى c ، حيث $n=0, 1, \dots$ • ما هو الشرط الذي نجده من المسألة ١٠ ؟ وإذا انطلقنا من $x_0=1$ ، فاحسب التقريبات x_1, \dots, x_4 ل $\sqrt{2}$ •

١٧- ليكن $T: X \rightarrow X$ تقليصا على فضاء مترى تام ، بحيث تتحقق المتباينة (1) • وبسبب أخطاء التدوير وأسباب أخرى ، فإننا غالبا ما نأخذ بدلا من T تطبيقا $S: X \rightarrow X$ بحيث تتحقق المتباينة

$$d(Tx, Sx) \leq \eta \quad (\eta > 0 \text{ عدد مناسب})$$

أيا كان x من X • أثبت باستعمال طريقة الاستقراء الرياضي أنه عندئذ يكون أيا كان x من X :

$$d(T^m x, S^m x) \leq \eta \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} \quad (m=1, 2, \dots).$$

١٨- قد لا يوجد للتطبيق S الوارد في المسألة ١٧ نقطة ثابتة • ولكن قد يحدث

غالبا أن توجد نقطة ثابتة y لـ S من أجل عدد ما n • بين بالافادة من المسألة ١٧
أن المسافة بين y والنقطة الثابتة x تكون عندئذ هي

$$d(x, y) \leq \frac{\eta}{1-\alpha}.$$

١٩- لنفترض في المسألة ١٧ أن $x = Tx$ و $y_m = S^m y_0$ • بين باستعمال (5) والمسألة ١٧ أن

$$d(x, y_m) \leq \frac{1}{1-\alpha} [\eta + \alpha^m d(y_0, Sy_0)].$$

ما هي أهمية هذا الدستور في التطبيقات ؟

٢٠- (شرط ليبشتر) تقول عن تطبيق $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ انه يحقق
شرط ليبشتر بثابت ليبشتر k على $[a, b]$ اذا وجد عدد ثابت k
بحيث يتحقق الشرط

$$|Tx - Ty| \leq k |x - y|.$$

أيا كان x و y من $[a, b]$ • (أ) هل T تقليص ؟ (ب) اذا وجد لـ T مشتق
مستمر على $[a, b]$ ، فبين أن T يحقق شرط ليبشتر • (ج) هل عكس (ب)
صحيح ؟

٥-٢ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات الخطية

لمبرهنة النقطة الثابتة لباناخ تطبيقات هامة في طرق التكرير المتعلقة بحل
جمل المعادلات الجبرية الخطية ، وهي تقدم شروطا كافية لتقارب حدود الخطأ •
ولفهم الموضوع ، نعيد أولا الى الذاكرة أن ثمة طرقا مباشرة عدة لحل
مثل هذه الجملة (وهذه الطرق تعطي الحل التام بعد القيام بعدد منته من العمليات

الحسابية اذا كانت الدقة - طول الكلمة في الآلة الحاسبة - غير محدودة) ، ومن الامثلة المألوفة طريقة الحذف لعوض (الطريقة النظامية التي تعلم في المدارس) .
 بيد أن التكرير ، أو الطريقة غير المباشرة ، قد يكون أكثر فعالية اذا كانت الجملة من نمط خاص ، كأن تكون غير كثة ، أي أنها تتألف من عدد كبير من المعادلات الا أن عدد معاملاتها غير الصفيرية قليل . (ان مسائل الاهتزازات والشبكات وتقريبات الفضل للمعادلات التفاضلية الجزئية غالباً ما تقود الى جملة غير كثة) .
 وفضلاً عن ذلك ، فإن الطرق المباشرة المعتادة تتطلب قرابة $n^3/3$ من العمليات الحسابية (n = عدد المعادلات = عدد المجاهيل) ، وقد تصبح أخطاء التدوير كبيرة جداً عندما تأخذ n قيماً كبيرة ، في حين أنه في التكرير ، فإن الأخطاء الناشئة عن التدوير تتلاشى في نهاية المطاف . وفي الحقيقة ، فإن طرق التكرير تستعمل غالباً لتحسين «الحلول» التي نجدها باستخدام الطرق المباشرة .

لتطبيق مبرهنة باناخ ، فإننا نحتاج الى فضاء مترى تام وتطبيق تقليص عليه .
 لنأخذ المجموعة X لجميع المرتبات n من الأعداد الحقيقية التي نكتبها بالشكل

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n), \quad z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n),$$

وهكذا . لنعين على X متركا d معرفاً بالمساواة

$$(1) \quad d(x, z) = \max_j |\xi_j - \zeta_j|.$$

ان $X = (X, d)$ تام ، وهذا أمر يمكن اثباته بصورة مماثلة لما فعلناه في المثال ١-٥-١ .

سنعرف على X التطبيق $T: X \rightarrow X$ بالدمستور

$$(2) \quad y = Tx = Cx + b$$

حيث $C = (c_{jk})$ مصفوفة حقيقية مثبتة $n \times n$ ، وحيث b متجه مثبت في X . ان كل المتجهات هنا وحيثما وجدت في هذا البند هي متجهات عمودية ، بسبب الاصطلاحات المألوفة في ضرب المصفوفات .

ما هي الشروط الواجب توفرها كي يكون T تقليصا ؟ اذا كتبنا (2) بدلالة المركبات ، فاننا نجد

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} \xi_k + \beta_j \quad j = 1, \dots, n,$$

حيث $b = (\beta_j)$. فاذا وضعنا $w = (\omega_j) = Tz$ ، فاننا نجد من (1) و (2) أن

$$\begin{aligned} d(y, w) &= d(Tx, Tz) = \max_j |\eta_j - \omega_j| \\ &= \max_j \left| \sum_{k=1}^n c_{jk} (\xi_k - \zeta_k) \right| \\ &\leq \max_i |\xi_i - \zeta_i| \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}| \\ &= d(x, z) \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}|. \end{aligned}$$

نرى بأنه يمكن كتابة هذا بالشكل $d(y, w) \leq \alpha d(x, z)$ ، حيث

$$(3) \quad \alpha = \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}|.$$

وهكذا فانه يترتب على مبرهنة باناخ ما يلي .

١-٢-٥ مبرهنة (المعادلات الخطية)

اذا كانت الجملة

$$(4) \quad x = Cx + b \quad (C = (c_{jk}) \text{ معطى})$$

المؤلفة من n من المعادلات الخطية في n من الجاهيل ξ_1, \dots, ξ_n (مركبات x) تحقق الشرط

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n |c_{jk}| < 1 \quad (j = 1, \dots, n),$$

فلها حل واحد بالضبط x . يمكن الحصول على هذا الحل بإيجاد نهاية المتتالية التكريرية $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ ، حيث $x^{(0)}$ كيفي وحيث

$$(6) \quad x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \quad m = 0, 1, \dots$$

أما حدود الخطأ فهي [راجع (3)]

$$(7) \quad d(x^{(m)}, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

أن (5) شرط كاف للتقارب ، وهو معيار مجموع الاسطر ذلك أنه يحوي مجاميع سطرية نجدها بجمع القيم المطلقة لعناصر سطر في C . وإذا استعضنا عن (1) بمشارك أخرى ، فإننا نجد شروطا أخرى . ونورد في المسألتين ٨ و ٧ حالتين هامتين من الوجهة التطبيقية .

كيف تكون المبرهنة ١-٢-٥ مرتبطة بالطرق المستعملة في التطبيقات العملية ؟ ان الجملة المؤلفة من n من المعادلات والحاوية على n من المجاهيل تكتب عادة بالشكل

$$(8) \quad Ax = c,$$

حيث A مصفوفة مربعة عدد أسطرها n . والعديد من الطرق التكريرية في حل (8) حيث $\det A \neq 0$ تتم بأن نكتب $A = B - G$ حيث B مصفوفة غير شاذة مناسبة . عندئذ تغدو (8) بالشكل

$$Bx = Gx + c$$

وبالتالي نجد أن

$$x = B^{-1}(Gx + c).$$

وهذا يوحي بالتكرير (6) حيث

$$(9) \quad C = B^{-1}G, \quad b = B^{-1}c.$$

لنوضح هذا بطريقتين معياريتين ، هما طريقة جاكوبي في التكرير ذات الالهمية النظرية البالغة ، وطريقة غوص - سيدل في التكرير المستعملة بصورة واسعة في الرياضيات التطبيقية .

٢-٢-٥ تكرير جاكوبي

تعرف طريقة التكرير هذه كما يلي :

$$(10) \quad \xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(\gamma_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{jk} \xi_k^{(m)} \right) \quad j=1, \dots, n,$$

حيث $c = (\gamma_j)$ في (8) ، ونفترض أن $a_{jj} \neq 0$ عندما $j=1, \dots, n$. ويقترح هذا التكرير بحل المعادلة ذات الترتيب j في (8) بالنسبة الى ξ_j . من السهل التحقق بأن (10) يمكن كتابتها بالشكل (6) حيث

$$(11) \quad C = -D^{-1}(A - D), \quad b = D^{-1}c$$

بفرض أن $D = \text{diag}(a_{jj})$ هي المصفوفة القطرية التي عناصرها غير الصفرية هي عناصر القطر الرئيسي لـ A .

ان الشرط (5) المطبق على C في (11) كاف لتقارب تكرير جاكوبي . وبما أن C في (11) بسيطة نسبيا ، فانه يمكن التعبير عن (5) مباشرة بدلالة عناصر A ، وتكون النتيجة هي معيار مجموع الاسطر لتكرير جاكوبي

$$(12) \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left| \frac{a_{jk}}{a_{jj}} \right| < 1 \quad j=1, \dots, n,$$

أو

$$(12^*) \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| < |a_{jj}| \quad j=1, \dots, n.$$

ويمكن القول بأن هذا يبين أن التقارب يكون مضمونا اذا كانت العناصر في القطر الرئيسي لـ A كبيرة بقدر كاف .

لاحظ بأنه في تكرير جاكوبي ، فقد تكون بعض المركبات لـ $x^{(m+1)}$ متوفرة في لحظة معينة ، الا أنها لا تستعمل أثناء تقدم عملية حساب المركبات الباقية ، أي ان جميع المركبات لتقريب جديد تقدم في آن واحد في نهاية الدورة التكريرية . ونعبر عن هذه الحقيقة بقولنا ان تكرير جاكوبي هو طريقة **للتصحيجات الآتية** .

٥-٢-٢ تكرير غوص - سيدل

ان هذه طريقة **للتصحيجات المتتابة** ، التي تستعمل فيها كل المركبات المعروفة أخيرا في كل لحظة . وتعرف الطريقة كما يلي :

$$(13) \quad \xi_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ij}} \left(r_i - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^n a_{ik} \xi_k^{(m)} \right).$$

حيث $j=1, \dots, n$ ، ونفترض ثانية أن $a_{ij} \neq 0$ أي a كان j .

ونحصل على مصفوفة من (13) بأن نكتب (الشكل ٥٢)

$$A = -L + D - U$$

حيث D هو كما عرفناه في تكرير جاكوبي ، وحيث L و U مصفوفتان مثلثتان سفلى وغليا على الترتيب ، عناصرهما في القطر الرئيسي أصفار جميعا ، وإشارتا الناقص الوردتان أمر اصطلاحي ومتفق عليه . لتسهيل الآن أن كل معادلة في (13) ضربت بـ a_{ij} . عندئذ يمكننا كتابة الجملة الناتجة بالشكل

$$Dx^{(m+1)} = c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)}$$

أو

$$(D - L)x^{(m+1)} = c + Ux^{(m)}.$$


$$(14) \quad C = (D - L)^{-1}U, \quad b = (D - L)^{-1}c.$$

Todd, J. (1962), *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill

مسائل

- ١ - تحقق من صحة (11) و (14) •
٢ - لنأخذ الحملة

$$5\xi_1 - \xi_2 = 7$$

$$-3\xi_1 + 10\xi_2 = 24.$$

(آ) حدد الحل التام • (ب) طبق تكرير جاكوبي • هل تحقق C الشرط (5) ؟

وإذا انطلقنا من المتجه $x^{(0)}$ الذي مركباته 1, 1 ، فاحسب $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ وحدود الخطأ (7) ل $x^{(2)}$. قارن هذه الحدود بالخطأ الفعلي ل $x^{(2)}$. (ج) طبق تكرير غوص - سيدل ، وذلك بإجراء نفس الخطوات كما في (ب) .

٣ - لنأخذ الجملة

$$\begin{aligned}\xi_1 - 0.25\xi_2 - 0.25\xi_3 &= 0.50 \\ -0.25\xi_1 + \xi_2 - 0.25\xi_4 &= 0.50 \\ -0.25\xi_1 + \xi_3 - 0.25\xi_4 &= 0.25 \\ -0.25\xi_2 - 0.25\xi_3 + \xi_4 &= 0.25.\end{aligned}$$

() تنشأ المعادلات من هذا النمط في الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية) . (أ) طبق تكرير جاكوبي منطلقاً من $x^{(0)}$ ذي المركبات 1, 1, 1, 1 ، بإجراء ثلاث خطوات . قارن التقريبات بالقيم الحقيقية $\xi_1 = \xi_2 = 0.875$ و $\xi_3 = \xi_4 = 0.625$. (ب) طبق تكرير غوص - سيدل بإجراء نفس ما فعلناه في (أ) .
٤ - تنص مبرهنة كيرشكودين على أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $C = (c_{jk})$ ، فإننا نجد من أجل عدد ما j ، حيث $1 \leq j \leq n$ ، أن

$$|c_{jj} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |c_{jk}|.$$

(القيمة الذاتية ل C هي عدد λ بحيث تتحقق المساواة $Cx = \lambda x$ من أجل عنصر ما غير صفري x) . (أ) بين أنه يمكن كتابة (4) بالشكل $Kx = b$ ، حيث $K = I - C$ وعندئذ تقتضي مبرهنة كيرشكودين (5) معاً أنه لا يمكن أن يوجد ل K قيمة ذاتية 0 (وبالتالي تكون K غير شاذة ، أي أن يكون $\det K \neq 0$ ويكون للمعادلة $Kx = b$ حل وحيد) . (ب) بين بأن (5) ومبرهنة كيرشكودين تقتضيان بأن يكون ل C في (6) نصف قطر طيفي أصغر من 1 . (يمكن الإثبات بأن هذا لازم وكاف لتقارب التكرير .
ونصف القطر الطيفي ل C هو $\max |\lambda_i|$ ، حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية ل C) .

٥ - بين المثال التالي جملة يتباعد من أجلها تكرير جاكوبي في حين يتقارب تكرير غوص - سيدل :

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 4$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 4$$

$$\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 4.$$

فاذا انطلقنا من $x^{(0)} = 0$ ، تحقق من تباعد تكرير جاكوبي وانجز الخطوات القليلة الاولى في تكرير غوص - سيدل لتحصل على الانطباع بأن التكرير يبدو متقاربا من الحل التام $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$.

٦ - من المقبول ظاهريا الظن بأن تكرير غوص - سيدل أفضل من تكرير جاكوبي في كل الاحوال . وواقع الامر ، فان الطريقتين غير قابلتين للمقارنة ، وهذا أمر يدعو للدهشة . وعلى سبيل المثال ، ففي حالة الجملة

$$\xi_1 + \xi_3 = 2$$

$$-\xi_1 + \xi_2 = 0$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 = 0$$

يكون تكرير جاكوبي متقاربا ، في حين أن تكرير غوص - سيدل متباعد . استنتج هاتين الحقيقتين انطلاقا من الشروط اللازمة والكافية المنصوص عنها في الشق (ب) من المسألة ٤ .

٧ - (مقياس مجموع الاعمة) يقابل المتركة في (1) الشرط (5) . فاذا زودنا x بالمتركة d_1 المعرف بالمساواة

$$d_1(x, z) = \sum_{j=1}^n |\xi_j - \zeta_j|,$$

بين عندئذ أننا نجد عوضا عن (5) الشرط

$$\sum_{j=1}^n |c_{jk}| < 1 \quad (k = 1, \dots, n).$$

(15)

٨ - (معيار مجموع المربعات) يقابل المترك في (1) الشرط (5) . فاذا
زودنا x بالمترك الاقليدي d_2 المعرف بالمساواة

$$d_2(x, z) = \left[\sum_{j=1}^n (\xi_j - \zeta_j)^2 \right]^{1/2},$$

بين عندئذ أننا نجد عوضا عن (5) الشرط

$$(16) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}^2 < 1.$$

٩ - (تكرير جاكوبي) بين أنه في حالة تكرير جاكوبي ، فإن الشروط
الكافية للتقارب (5) و (15) و (16) تأخذ الشكل

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} < 1, \quad \sum_{j=1}^n \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} < 1, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_{jk}^2}{a_{jj}^2} < 1.$$

١٠ - أوجد المصفوفة C التي تحقق (5) دون أن تحقق (15) أو (16) .

٣-٥ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التفاضلية

ان أهم تطبيقات مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ ترد في سياق فضاءات الدوال ،
وعندئذ تمدنا المبرهنة بمبرهنتات في وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية
والمعادلات التكاملية ، كما سنرى في هذا البند .

سنأخذ في هذا البند معادلة تفاضلية عادية ظاهرة من المرتبة الاولى

$$(1a) \quad x' = f(t, x) \quad (f' = d/dt).$$

وتتألف مسألة القيمة الابتدائية لهذه المعادلة من المعادلة نفسها ومن الشرط
الابتدائي

$$(1b) \quad x(t_0) = x_0$$

حيث t_0 و x_0 عدداً حقيقياً معطيان .

سنستخدم مبرهنة باناخ لاثبات مبرهنة بيكار الشهيرة ، التي على الرغم من كونها ليست الاقوى بين المبرهنات المماثلة المعروفة ، الا أنها تلعب دوراً حيوياً في نظرية المعادلات التفاضلية العادية . وفكرة المعالجة جد بسيطة ، اذ أننا سنحول (1) الى معادلة تكاملية تعرف تطبيقاً T ، وشروط المبرهنة ستقتضي أن يكون T تقليصاً بحيث تغدو نقطته الثابتة هي الحل لمسألتنا .

٥-٣-١ مبرهنة بيكار في الوجود والوحدانية (المعادلات التفاضلية العادية)

لتكن f دالة مستمرة على المستطيل

$$R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

وبالتالي فإن f محدودة على R ، ولنفترض مثلاً أن

$$(2) \quad |f(t, x)| \leq c \quad \text{أي} \quad \text{كان } (t, x) \in R$$

لنفترض أن f تحقق شرط ليبشتر على R بالنسبة للمتغير الثاني x ، أي أنه يوجد عدد ثابت k (هو ثابت ليبشتر) بحيث أنه اذا كان (t, x) و (t, v) عنصريين من R فإن

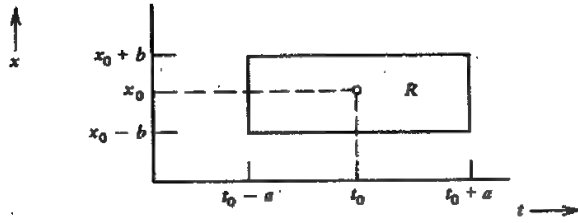
$$(3) \quad |f(t, x) - f(t, v)| \leq k |x - v|.$$

عندئذ يكون لمسألة القيمة الابتدائية (1) حل وحيد . وهذا الحل موجود على الفترة $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ ، حيث*

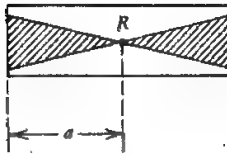
$$(4) \quad \beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}.$$

* في البرهان التقليدي يكون $\beta < \min \{a, b/c\}$ وهذا افضل . ويمكن الحصول على هذا أيضاً بتعديل البرهان الحالي (وذلك باستخدام مترك أعقد) ، راجع الكتاب التالي :

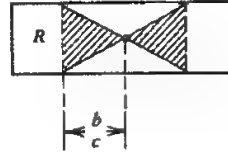
Bielicki, A. (1956), Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov. Bull. Acad. Polon. Sci. 4, 261-268



الشكل (٥٣) • المستطيل R



(A) $a < \frac{b}{c}$



(B) $a > \frac{b}{c}$

الشكل (٥٤) • الايضاح الهندسي للمتباينة (2) عندما يكون c صغيرا نسبيا في (A) ، وكبيرا نسبيا في (B) . ويجب ان يبقى منحني الحل في المنطقة المظلة المحدود بمستقيمين ميلهما $\pm c$.

البرهان :

ليكن $C(J)$ الفضاء المترى المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على الفترة $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ وحيث المترى d معرف بالمساواة

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

إن $C(J)$ تام ، الامر الذي نعرفه من ١-١-٥ . ليكن \bar{C} الفضاء الجزئي من $C(J)$ المؤلف من كل الدوال x في $C(J)$ التي تحقق الشرط

$$(5) \quad |x(t) - x_0| \leq c\beta.$$

من السهل أن نرى بأن \bar{C} مغلق في $C(J)$ (راجع المسألة ٦) ، وبالتالي فإن \bar{C} تام استنادا الى ١-٤-٧ .

وبإجراء المكاملة ، نرى أن (1) يمكن أن يكتب بالشكل $x = Tx$ ، حيث

$$\bar{C} \rightarrow T: \bar{C} \text{ معرف كما يلي}$$

$$(6) \quad Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

وفعلا ، فإن T معرف أيا كان x من \bar{C} ، ذلك أن $c\beta < b$ استنادا الى (4) ، وبالتالي فإذا كان $x \in \bar{C}$ ، فإن $\tau \in J$ و $(\tau, x(\tau)) \in R$ ، ويكون التكامل الوارد في (6) موجودا نظرا لكون f مستمرة على R وكي نرى أن صورة T وفق \bar{C} هي نفسها ، يمكن استعمال (6) و (2) وعندئذ نجد أن

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq c |t - t_0| \leq c\beta.$$

سنبين أن T تقليص على \bar{C} . يترتب على شرط ليشتز (3) أن

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tv(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))] d\tau \right| \\ &\leq |t - t_0| \max_{\tau \in J} k |x(\tau) - v(\tau)| \\ &\leq k\beta d(x, v). \end{aligned}$$

ولما كانت العبارة الاخيرة مستقلة عن t ، فمن الممكن أخذ القيمة الاكبر \max في الطرف الايسر فنجد أن

$$\alpha = k\beta. \quad \text{حيث} \quad d(Tx, Tv) \leq \alpha d(x, v)$$

نرى من (4) أن $\alpha = k\beta < 1$ ، وبالتالي فإن T هو تقليص على \bar{C} حقا . وهكذا فإن المبرهنة ١-٥-٢ تقتضي بأنه يوجد لـ T نقطة ثابتة وحيدة x في \bar{C} ، أي دالة مستمرة x على J تحقق المساواة $x = Tx$. وبوضع $x(t)$ بدلا من $Tx(t)$ في (6) نجد أن

$$(7) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

ولما كان $(\tau, x(\tau)) \in R$ ، حيث f مستمرة ، فمن الممكن اشتقاق (7) • لذا فان x زوجية ولها مشتق وتحقق (1) • وبالعكس ، فكل حل لـ (1) يجب أن يحقق (7) • وبذا يكتمل البرهان ■

وتقتضي مبرهنة باناخ أيضا أن الحل x لـ (1) هو نهاية المتتالية (x_0, x_1, \dots) التي نحصل عليها بتكرير بيكار

$$(8) \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau$$

حيث $n = 0, 1, \dots$ • الا أنه تجدر بنا الإشارة الى أن الفائدة العملية لهذه الطريقة في الحصول على تقريبات لحل (1) وحدود الخطأ المقابلة ذات فائدة محدودة بسبب المكاملات الواردة •

وفي الختام نورد ما يلي • يمكن اثبات أن استمرار f كاف (وليس لازما) لوجود حل للمسألة (1) ، ولكنه ليس كافيا للوحدانية • وشرط ليشتز كاف (كما تبين مبرهنة بيكار) وليس لازما • لمزيد من التفصيل راجع الكتاب التالي :

Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover

ويحوي هذا الكتاب أيضا ملاحظات تاريخية حول مبرهنة بيكار (الصفحة ٦٣) وبرهانا تقليديا ، بحيث يتمكن القارئ من مقارنة معالجتنا الحالية بالمعالجة التقليدية •

مسائل

١ — اذا كان المشتق الجزئي $\partial f / \partial x$ للدالة f موجودا ومستمر على المستطيل R (مبرهنة بيكار) فبين أن f تحقق شرط ليشتز على R بالنسبة للمتغير الثاني x •

٢ — بين أن الدالة f المحددة بالمساواة $f(t, x) = |\sin x| + t$ تحقق شرط ليشتز

على المستوى x بأكمله بالنسبة للمتغير الثاني x ، في حين أن $\partial f / \partial x$ ليس موجودا عندما $x=0$. ما هي الحقيقة التي يوضحها هذا ؟

٣ - هل تحقق الدالة f المعرفة بالمساواة $f(t, x) = |x|^{1/2}$ شرط ليبشتر ؟

٤ - أوجد كل الشروط الابتدائية بحيث أن مسألة القيمة الابتدائية $tx' = 2x$ و $x(t_0) = x_0$ (أ) ليس لها حلول ، (ب) لها أكثر من حل واحد ، (ج) لها حل واحد بالضبط .

٥ - اشرح أسباب الشرطين $\beta < b/c$ و $\beta < 1/k$ في (4) .

٦ - بين أن \bar{C} في برهان مبرهنة بيكار هي مجموعة مغلقة في $C(J)$.

٧ - أثبت أنه يمكننا في مبرهنة بيكار أن نأخذ بدلا من الثابتة x_0 أي دالة أخرى $y_0(t_0) = x_0$ ، $y_0 \in \bar{C}$ كدالة ابتدائية للتكرير .

٨ - طبق تكرير بيكار (8) على $x' = 1 + x^2$ و $x(0) = 0$. تحقق أنه بالنسبة الى x_3 ، فإن الحدود الحاوية على t^1, t^2, \dots, t^3 هي تماما مثل حدود الحل التام .

٩ - بين أنه يوجد للمسألة $x' = 3x^{2/3}$ و $x(0) = 0$ عدد غير منته من الحلول x معطاة كما يلي :

$$x(t) = 0 \text{ عندما } t < c, \quad x(t) = (t-c)^3 \text{ عندما } t \geq c$$

حيث $c > 0$ أي ثابت . هل يحقق $3x^{2/3}$ في اليمين شرط ليبشتر ؟

١٠ - بين بأن حلول مسألة القيمة الابتدائية

$$x' = |x|^{1/2}, \quad x(0) = 0$$

هي $x_1 = 0$ و x_2 ، حيث $x_2(t) = t|t|/4$. هل يتناقض هذا مع مبرهنة بيكار ؟ أوجد حلولاً أخرى .

٥-١ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التكاملية

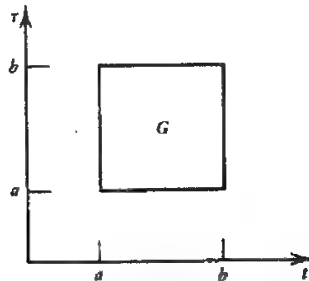
سنفيد في الختام من مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ كمنهل لمبرهنات الوجود والوحدانية للمعادلات التكاملية . تسمى المعادلة التكاملية من النمط

$$(1) \quad x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau = v(t)$$

معادلة فريدهولم من النوع الثاني * . ان $[a, b]$ هنا هي فترة معطاة ، و x دالة على $[a, b]$ وهي مجهولة ، و μ وسيط . ان النواة k للمعادلة هي دالة معروفة على المربع $G = [a, b] \times [a, b]$ ، كما أن v هي دالة معطاة على $[a, b]$.

يمكن دراسة المعادلات التكاملية على فضاءات دوال مختلفة . وفي هذا البند ، فاننا ندرس (1) على $C[a, b]$ ، أي على فضاء الدوال المستمرة المعروفة على الفترة $J = [a, b]$ حيث المترك d يعطى بالدستور

$$(2) \quad d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|;$$



الشكل (٥٥) . ساحة التعريف G للنواة k

في المعادلة التكاملية (1) في حالة عديدين موجيين a و b .

* ان ورود الحد $x(t)$ يمكننا من تطبيق التكرير كما تبين المبرهنة ٥-١-١ . واذا لم تحو معادلة هذا الحد ، فتكون من الشكل

$$\int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau = v(t)$$

ويقال عنها انها من النوع الاول .

(راجع اسمه) • ومن المهم أن نلاحظ لدى تطبيقنا الحالي لمبرهنة باناخ أن

• $C[a, b]$ تام • سنفرض أن v المنسبة إلى $C[a, b]$ و k مستمرتان على G •

عندئذ تكون k دالة محدودة على G ، وليكن مثلاً

$$(3) \quad |k(t, \tau)| \leq c \quad \text{أيما كان } (t, \tau) \in G$$

من الواضح أنه يمكن كتابة (1) بالشكل $x = Tx$ ، حيث

$$(4) \quad Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

بما أن v و k مستمرتان، فإن الدستور (4) يحدد مؤثراً $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ •

سنفرض الآن قيماً على μ بحيث يغدو T تقليصاً • نستنتج من (2) و (4) أن

$$d(Tx, Ty) = \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)|$$

$$= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)] d\tau \right|$$

$$\leq |\mu| \max_{t \in J} \int_a^b |k(t, \tau)| |x(\tau) - y(\tau)| d\tau$$

$$\leq |\mu| c \max_{\sigma \in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b d\tau$$

$$= |\mu| c d(x, y)(b - a).$$

ويمكن كتابة هذا بالشكل $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ ، حيث

$$\alpha = |\mu| c(b - a).$$

نرى أن T يمكن أن يصبح تقليصاً ($\alpha < 1$) إذا كان

$$(5) \quad |\mu| < \frac{1}{c(b - a)}.$$

لذا فإن مبرهنة النقطة الثابتة ٥-١-٢ نعطينا الآن المبرهنة التالية :

١-٤-٥ مبرهنة (معادلة فريدهولم التكاملية)

لتكن الدالتان k و v في (1) مستمرتين على $J \times J$ و $J = [a, b]$ على الترتيب ، ولنفترض أن μ يحقق (5) حيث c معرفة في (3) . عندئذ يوجد لـ (1) حل وحيد x على J . أن هذه الدالة x هي نهاية المتتالية التكريرية (x_0, x_1, \dots) حيث x_0 أي دالة مستمرة على J ، وحيث

$$(6) \quad x_{n+1}(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) x_n(\tau) d\tau.$$

عندما $n = 0, 1, \dots$

هذا وسندرس النظرية الشهيرة للمعادلات التكاملية في الفصل الثامن .

لنتقل الآن الى معادلة فولتيرا التكاملية

$$(7) \quad x(t) - \mu \int_a^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau = v(t).$$

ان الفرق بين (1) و (7) يكمن في أن الحد الاعلى للتكامل في (1) هو عدد ثابت b ، في حين أنه في (7) متغير . وهذا أمر أساسي ، فانتا دون فرض أي قيد على μ نجد مبرهنة الوجود والوحداية التالية .

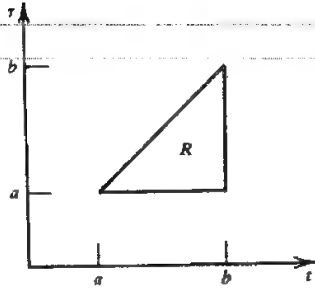
٢-٤-٥ مبرهنة (معادلة فولتيرا التكاملية)

لنفترض ان v الواردة في (7) مستمرة على $[a, b]$ ، وأن النواة k مستمرة على المنطقة المثلثة R في المستوي $t\tau$ المحددة بالمتباينات $a \leq \tau \leq t$ و $a \leq t \leq b$ (انظر الى الشكل ٥٦) . عندئذ يوجد لـ (7) حل وحيد x على $[a, b]$ أيا كان μ .

البرهان :

نرى أن المعادلة (7) يمكن أن تكتب بالشكل $x = Tx$ حيث $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ معرف بالمساواة

$$(8) \quad Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$



الشكل (٥٦) . المنطقة المثلثة R في البرهنة ٢-٤ في حالة عددين موجبين a و b

بما أن k مستمرة على R وأن R مغلقة ومحدودة ، فإن k محدودة على R ،
ولكن مثلاً

$$|k(t, \tau)| \leq c \quad \text{أيما كان } (t, \tau) \in R$$

وهكذا ، فإننا نجد استناداً الى (2) أنه أيما كان x و y من $C[a, b]$ فإن

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau) [x(\tau) - y(\tau)] d\tau \right| \\ (9) \quad &\leq |\mu| c d(x, y) \int_a^t d\tau \\ &= |\mu| c (t-a) d(x, y). \end{aligned}$$

سنبين بالاستقراء الرياضي أن

$$(10) \quad |T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x, y).$$

ان هذه المتباينة في الحالة $m=1$ ليست سوى (9) . فإذا افترضنا أن (10)
صحيحة من أجل m ، فإننا نجد من (8) أن

$$\begin{aligned} |T^{m+1} x(t) - T^{m+1} y(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau) [T^m x(\tau) - T^m y(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq |\mu| c \int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(\tau-a)^m}{m!} d\tau d(x, y) \end{aligned}$$

$$= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y),$$

لذا فالتا نكون قد استنتجنا صحة (10) أيا كان m بتطبيق طريقة الاستقراء الرياضي .

وبالافادة من $t-a \leq b-a$ في الطرف الايمن من (10) ، ومن ثم بأخذ القيمة الاكبر \max في الطرف الايسر عندما تمشح t المجموعة J ، فالتا نستنتج من (10) أن

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x, y)$$

حيث

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}.$$

نلاحظ أنه أيا كان μ المثبت ، وأيا كان العدد m الكبير بقدر كاف ، فان $\alpha_m < 1$. لذا فان T^m المقابل يكون تقليصا على $C[a, b]$ ، وعندها نستنتج صحة مبرهنتنا من التمهيدية التالية :-

٢-٤-٥ تمهيدية (النقطة الثابتة)

ليكن $T: X \rightarrow X$ تطبيقا مستمرا (راجع ١-٣-٢) على فضاء مترى تام $X = (X, d)$ ، ولنفترض أن T^m تقليص على X ، حيث m عدد صحيح موجب . عندئذ يوجد لـ T نقطة ثابتة وحيدة .

البرهان :

ان $B = T^m$ هو فرضا تقليص على X ، أي أن $d(Bx, By) \leq \alpha d(x, y)$ أيا كان x, y من X ، وهنا $\alpha < 1$. لذا فالتا نجد أيا كان x_0 من X أن

$$d(B^n T x_0, B^n x_0) \leq \alpha d(B^{n-1} T x_0, B^{n-1} x_0)$$

(11)

$$\dots \leq \alpha^n d(T x_0, x_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ان مبرهنة باناخ ١-٥-٢ تقتضي أن يوجد لـ B نقطة ثابتة وحيدة ، سنرمز لها بـ

x ، و $x \rightarrow B^n x_0$ • وبما أن التطبيق T مستمر ، فإن هذا يقتضي أن يكون
 $B^n T x_0 = T B^n x_0 \rightarrow T x$ • لذا فالتنا نجد وفق (ب) من ١-٤-٢ أن

$$d(B^n T x_0, B^n x_0) \rightarrow d(T x, x),$$

وبالتالي فإن $d(T x, x) = 0$ وفق (11) • ويبين هذا أن x نقطة ثابتة لـ T • ولما
 كانت كل نقطة ثابتة لـ T ثابتة لـ B كذلك ، فالتنا نرى أنه لا يمكن أن يوجد لـ T
 أكثر من نقطة ثابتة واحدة • ■

نلاحظ في الختام أنه يمكن اعتبار معادلة فولتيرا معادلة فريدهولم خاصة
 بنواتها k صفرية في ذلك الجزء من المربع $[a, b] \times [a, b]$ حيث يكون $\tau > t$ (انظر
 الى الشكلين ٥٥ و ٥٦) ، وقد تكون k غير صفرية في نقاط من القطر $(\tau = t)$ •

مسائل

١ — حل المعادلة التالية باستخدام التكرير ، وباختيار $x_0 = v$:

$$x(t) - \mu \int_0^1 e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = v(t) \quad (|\mu| < 1).$$

٢ — (المعادلة التكاملية غير الخطية) إذا كانت n و k مستمرتين على $[a, b]$ و
 $C = [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ على الترتيب ، وكانت k محققة على G لشرط ليشتز
 من النمط

$$|k(t, \tau, u_1) - k(t, \tau, u_2)| \leq l |u_1 - u_2|,$$

فبين بأنه يوجد للمعادلة التكاملية غير الخطية

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau, x(\tau)) d\tau = v(t)$$

حل وحيد x أيما كان μ المحقق للشرط $|\mu| < 1/l(b-a)$ •

٣ - من المهم أن ندرك بأن المعادلات التكاملية تنشأ أيضا من مسائل في المعادلات التفاضلية . (أ) اكتب مثلا مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

على شكل معادلة تكاملية ، وحدد نوع المعادلة هذه . (ب) بين أن مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1$$

الخواوية على معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية يسكن أن تحول الى معادلة فولتيرا التكاملية .

٤ - (متسلسلة نويمان) اذا عرفنا مؤثرا S بالمساواة

$$Sx(t) = \int_0^t k(t, \tau)x(\tau) d\tau$$

ووضعنا $z_n = x_n - x_{n-1}$ ، فبين أن (6) تقتضي أن يكون

$$z_{n+1} = \mu S z_n.$$

واذا اخترنا $x_0 = v$ ، فبين أن (6) تعطي متسلسلة نويمان

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = v + \mu S v + \mu^2 S^2 v + \mu^3 S^3 v + \dots$$

٥ - حل المعادلة التكاملية التالية (أ) بالافادة من متسلسلة نويمان ، (ب) بطريقة مباشرة

$$x(t) - \mu \int_0^1 x(\tau) d\tau = 1.$$

٦ - حل المعادلة التكاملية

$$x(t) - \mu \int_a^b cx(\tau) d\tau = \bar{v}(t)$$

حيث c ثابت ، وبين كيف يمكن استعمال متسلسلة نويمان الموافقة للحصول على شرط التقارب (5) لمتسلسلة نويمان للمعادلة (1) .

٧ - (النواة التكريرية . النواة الحالة) . أثبت أن متسلسلة نويمان الواردة في المسألة (٤) يمكن أن تكتب بالشكل

$$(S^n v)(t) = \int_a^b k_{(n)}(t, \tau) v(\tau) d\tau \quad n = 2, 3, \dots,$$

حيث تعطى النواة التكريرية $k_{(n)}$ كما يلي

$$k_{(n)}(t, \tau) = \int_a^b \dots \int_a^b k(t, t_1) k(t_1, t_2) \dots k(t_{n-1}, \tau) dt_1 \dots dt_{n-1}$$

وبالتالي يمكن كتابة متسلسلة نويمان بالشكل

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) v(\tau) d\tau + \mu^2 \int_a^b k_{(2)}(t, \tau) v(\tau) d\tau + \dots$$

أو أنه يمكننا باستخدام النواة الحالة \bar{k} المعرفة بالدستور

$$\bar{k}(t, \tau, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j k_{(j+1)}(t, \tau) \quad (k_{(1)} = k)$$

أن نكتب المتسلسلة المذكورة بالشكل

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b \bar{k}(t, \tau, \mu) v(\tau) d\tau.$$

٨ - من المفيد معرفة أنه يمكن أيضا الحصول على متسلسلة نويمان الواردة في المسألة ٤ بأن نعوض متسلسلة القوى التالية

$$x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \dots$$

في (1) ، ثم بالمكاملة حدا حدا ، ومن ثم بمقارنة المعاملات • بين بأن هذا يعطي

$$v_0(t) = v(t), \quad v_n(t) = \int_a^b k(t, \tau) v_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

وبفرض أن $|v(t)| \leq c_0$ و $|k(t, \tau)| \leq c$ ، بين أن

$$|v_n(t)| \leq c_0 [c(b-a)]^n,$$

وبالتالي فإن (5) تقتضي التقارب •

٩ - حل (1) باستخدام المسألة ٧ ، حيث $a=0$ و $b=2\pi$ و

$$k(t, \tau) = \sum_{n=1}^N a_n \sin nt \cos n\tau.$$

١٠ - لنفترض في (1) أن $a=0$ و $b=\pi$ و

$$k(t, \tau) = a_1 \sin t \sin 2\tau + a_2 \sin 2t \sin 3\tau.$$

اكتب الحل بدلالة النواة الحالة (راجع المسألة ٧) •

★ ★ ★

ثبت المصطلحات

- ١ -

completion	إتمام
linear dependence	ارتباط خطي
exponent	أس
conjugate exponents	أسان مترافقان
mathematical induction	استقراء رياضي
linear independence	استقلال خطي
interpolation	استكمال
projection	اسقاط (مسقط)
infimum	الحد الأدنى
supremum	الحد الأعلى
reflexivity	انعكاسية
closedness	انغلاق
model	انموذج
isomorphism	ايزومورفيزم

- ب -

dimension	بعد
codimension	- متمم

- ت -

complete	تام
partition	تجزئة
compactness	تراص
sequential —	- متابعي
local —	- موضعي
linear combination	تركيب خطي
mapping	تطبيق
isometric —	- ايزومتري (متساوي المسافة)
bilinear —	- ثنائي الخطية
linear —	- خطي
conjugate linear —	- خطي مرافق
natural —	- طبيعي
inverse —	- عكسي
surjective —	- غامر
canonical —	- قانوني
injective —	- متباين
bounded —	- محدود
idempotent —	- مراوح
continuous —	- مستمر
open —	- مفتوح

variation	تغير
total —	— كلي
bounded —	— محدود
convergence	تقارب
operator —	— بالنسبة للمؤثرات
weak —	— ضعيف
weak* —	— ضعيف*
strong —	— قوي
uniform —	— منتظم
pointwise —	— نقطي
estimate	تقدير
proior —	— سابق
posterior —	— لاحق
contraction	تقليص
equivalence	تكافؤ
unitary —	— واحدي
integral	تكامل
Riemann - Stieltjes —	— ريمان - ستيلجس
iteration	تكرير
weak completeness	تمام ضعيف
representation	تمثيل
extension	تمديد (ممدد)
proper —	— فعلي
closed —	— مغلق
lemma	تمهيدية
symmetry	تناظر

- ج -

frontier (boundary)	جبهة (حد)
product	جداء
inner —	داخلي —
cartesian —	ديكارتي —
conjugate linear —	خطي مرافق —
sesquilinear —	خطي مرة ونصف —
scalar —	عددي —
vector —	متجهي —
halflinear —	نصف خطي —
neighbourhood	جوار
system	جملة
sparse —	غير كثة —

- ح -

limit	حد
infimum (g.l.b.)	أدنى —
supremum (l.u.b.)	أعلى —
polinomials	حدوديات
Bernstein —	بيرنشتاين —
Laguerre —	لاكير —
Legendre —	لوجاندر —

- خ -

property	خاصة
----------	------

commutative —

reflexivity

antisymmetry

transitivity

minimum —

electric delay line

linear

— تبديلية

— الانعكاس

— التخالف

— التعددي

— القيمة الصغرى

خط تأخير كهربائي

خطي

— د —

function

distance — (metric)

characteristic —

generating —

Hamming —

functional

linear —

sublinear —

positive homogeneous —

bounded —

formula

Rodrigue's —

Kronecker delta

دالة

— مسافة (مترك)

— مميزة

— مولدة

— هامنج

دالي

— خطي

— خطي جزئيا

— متجانس ايجابا

— محدود

دستور

— رودريك

دلتا كرونكير

— ر —

resonance

رنين

- س -

domain	مِنَاحَة
row	سَطْر
chain	سَلْسَلَة

- ش -

lattice	شَبَكِيَّة
pseudometric	شَبَه مَتْرِك
pseudonorm	شَبَه نَظِيم
condition	شَرَط
positive homogeneous —	— التَّجَانُس اِيجَابَا
subadditive —	— الْجَمْعِيَّة جَزْئِيَا
Lipschitz —	— لِيْبشْتِز

- ص -

class	صَف (صَنَف)
form	صِفَة
linear —	— خَطِيَّة
sesquilinear —	— خَطِيَّة مَرَّة وَنِصْف المَرَّة

- ض -

multiplication	ضَرْب
inner —	— دَاخِلِي
scalar —	— عَدَدِي
vector —	— مَتَجَهِي

- ط -

method	طريقة
— of simultaneous corrections	— التصحيحات الآتية
regular summability —	— في المجموعية المنتظمة
Euler's —	— اولر
permanent —	— دائمة
Cesàro's sunmability —	— شيزارو C_1 في المجموعية
Cesàro's C_n - method —	— C_n لشيزارو
Gram - Schmidt process	— غرام-شميت
sparse —	— غير كثة
a summability —	— في المجموعية
a matrix —	— مصفوية
a regular —	— منتظمة
Hölder summability —	— هولدر في المجموعية
A - method	A —
embedding	طمر
canonical —	— قانوني
embeddable	طمرور

- ع -

annihilator	عادم
number	عدد
cardinal —	— أصلي (كاردينالي)
real —	— حقيقي
rational —	— عادي

node	عقدة
relation	علاقة
Parseval —	— بارسفال
column	عمود
element	عنصر
minimal —	— اصغري
maximal —	— اعظمي
upper bound	— راجح
lower bound	— قاصر
comparable elements	عنصران متقارنان
- غ -	
nonlinear	غير خطي
- ف -	
category	فئة
space	فضاء
euclidean —	— اقليدي
reflexive —	— الدوال
Hilbert sequence —	— المتتاليات لهبرت
reflexive —	— انعكاسي
complete —	— تام
weakly complete —	— تام بضعف
dual —	— ثنوي
second dual	— ثنوي ثاني

algebraic dual —	— ثنوي جبري
inner product —	— جداء داخلي
subspace	— جزئي
improper subspace	— جزئي غير فعلي
proper subspace	— جزئي فعلي
real —	— حقيقي
topological —	— طوبولوجي
embeddable —	— ظمور
countable —	— عدود
complex —	— عقدي
uncountable —	— غير عدود
infinite dimensional —	— غير منتهي البعد
separable —	— فصول
sequence —	— متاليات
vector —	— متجهي
metric —	— متري
discrete —	— متقطع
abstract —	— مجرد
conjugate —	— مرافق
finite dimensional —	— منتهي البعد
normed —	— منظم
meager —	— هزيل
unitary —	— وحدي (واحد)
hyperplane	— فوق المستوي

— ق —

rule

قاعدة (قانون)

the three-eighths —

the rectangular —

Simpsons —

the trapezoidal —

basis

dual —

Schauder —

canonical —

Hamel —

sphere

diameter

— of a set

segment

value

eigenvalue

minimum

maximum

— الثمانيات الثلاث

— المستطيل

— سمبسون

— شبه المنحرف

قاعدة (أساس)

— ثنوية

— شاوردر

— قانونية

— هامل

قشرة كروية

قطر

— مجموعة

قطعة مستقيمة

قيمة

— ذاتية

— صفري

— عظمى

— ك —

ball

colsed —

open —

unit —

كرة

— مغلقة

— مفتوحة

— واحدة

— ل —

invariance

translation —

لاتغير

— الانسحاب

principle	مبدأ
— of uniform boundedness	— المحدودية المنتظمة
theorem	مبرهنة
finite dimension —	— البعد المنتهي
closed graph —	— البيان المغلق
open mapping —	— التطبيق المفتوح
bounded inverse —	— العكس المحدود
contraction —	— التقليل
category —	— الفئة
uniform boundedness —	— المحدودية المنتظمة
closed linear operator —	— المؤثر الخطي المغلق
fixed point —	— النقطة الثابتة
Banach fixed point —	— النقطة الثابتة لباناخ
Bolzano-wierstrass —	— بولزانو — فيرشتراس
Pólya —	— بوليا
Baire category —	— بير في الفئات
Steklov's —	— ستيكلوف
Wierstrass approximation —	— فيرشتراس في التقريب
Gershgorin's —	— كيرشكورين
inequality	متباينة
triangle —	— المثلث
generalized triangle —	— المثلث المعممة
Cauchy - Schwarz — for sums	— كوشي — شفارتز للمجاميع
Minkowski — for sums	— منكوفسكي للمجاميع

Hölder — for sums	— هولدر للمجاميع
sequence	متتالية
fundamental —	— أساسية
iterative —	— تكريرية
subsequence	— جزئية
— of interpolation polynomials	— حدوديات الاستكمال
monotone —	— رتيبة
weak Cauchy —	— كوشي الضعيفة
divergent —	— متباعدة
convergent —	— متقاربة
orthogonal —	— متعامدة
orthonormal —	— متعامدة منظمة
total orthonormal —	— متعامدة منظمة كلية
uniformly convergent —	— متقاربة بانتظام
weakly convergent —	— متقاربة بضعف
strongly convergent —	— متقاربة بقوة
limit of a —	— نهاية
vector	متجه
zero —	— اصغري
column —	— عمودي
minimizing —	— منصغر
metric (distance function)	مترك (دالة مسافة)
taxicab —	— سيارة الاجرة
induced —	— محدث (مستخلص ، مولد)
discrete —	— متقطع
uniform —	— منتظم

series	متسلسلة
infinite —	— غير منتهية
absolutely convergent —	— متقاربة بالاطلاق
Neumann —	— نويمان
identity	متطابقة
Appolonius —	— أبولونيوس
polarization —	— الاستقطاب
prerequisite	متطلب
variable	متغير
complement	متمم
algebraic —	— جبري
orthogonal —	— معامد
sum	مجموع
partial —	— جزئي
direct —	— مباشر
set	مجموعة
underlying —	— الرديف
power —	— القوة
countable —	— عدودة
nowhere dense —	— غير كثيفة في اي مكان
nonmeager —	— غير هزيلة
dense —	— كثيفة
total —	— كلية
total orthonormal —	— متعامدة منظمة كلية
convex —	— محدبة
bounded —	— محدودة

linearly dependent —	— مرتبطة خطيا
linearly independent —	— مستقلة خطيا
ordered —	— مرتبة
partially ordered —	— مرتبة جزئيا
totally ordered — (chain)	— مرتبة كلياً (سلسلة)
coset	— مشاركة
— of the first category	— من الفئة الاولى
— of the second category	— من الفئة الثانية
rare —	— نادرة
meager —	— هزيلة
n - tuple	— مرتبة
initial value problem	— مسألة القيمة الابتدائية
parallelogram equality	— مساواة متوازي الاضلاع
complex plane	— مستوي عقدي
projection	— مسقط (اسقاط)
differential	— مشتق
matrix	— مصفوفة
(real) symmetric —	— (حقيقية) متناظرة
skew - symmetric —	— متناظرة تخالفية
orthogonal —	— متعامدة
normal —	— ناظمية
Hermitian —	— هرميتية
skew - Hermitian —	— هرميتية تخالفية
unitary —	— واحدية (وحدة)
equation	— معادلة
differential —	— تفاضلية

partial differential —	— تفاضلية جزئية
ordinary differential —	— تفاضلية عادية
integral —	— تكاملية
Fredholm —	— فريدهولم
Fredholm — of the first kind	— فريدهولم من النوع الاول
Fredholm — of the second kind	— فريدهولم من النوع الثاني
Volterra —	— فولتيرا
coefficient	معامل
criterion	معيـار
Cauchy convergence —	— تقارب كوشي
row sum —	— مجموع الاسطر
column sum —	— مجموع الاعمدة
square sum —	— مجموع المربعات
restriction	مقصـور
representative	ممثـل
extension	ممدد (تمديد)
proper —	— فعلي
expansion	منشور
transpose	منقول
operator	مؤثر
projection —	— الاسقاط
left shift —	— النقل الایسر
right shift —	— النقل الایمن
integral —	— تكاملي
bounded linear. —	— خطي محدود
conjugate linear —	— خطي مرافق

zero —	— صفري
inverse —	— عكسي
self - adjoint —	— قرين ذاتيا (مترافق ذاتيا)
identity —	— مطابقة
differentiation —	— مفاضلة
normal —	— ناظمي
Hilbert - adjoint —	— هيلبرت المرافق
unitary —	— واحد (وحدوي)

— ن —

spectral radius	نصف القطر الطيفي
seminorm	نصف النظم
half space	نصف فضاء
semimetric	نصف مترك
norms	نظائيم
equivalent —	— متكافئة
norm	نظم
euclidean —	— اقليدي
natural —	— طبيعي
a — compatible with a —	— منسجم مع نظم
point	نقطة
accumulation —	— تراكم (تجمع)
fixed —	— ثابتة
boundary —	— حدية (جبهة)
interior —	— داخلية

closure —	— ملاصقة
'pointwise	نقطيا
limit	نهاية
A - limit	A —
weak —	— ضعيفة
weak* —	— ضعيفة*
strong —	— قوية
generalized —	— معممة
kernel	نواة
iterated —	— تكريرية
resolvent —	— حالة
— of an operator	— مؤثر

— ه —

homomorphism	هومومورفيزم (تساكل)
homeomorphism	هوميومورفيزم (تساكل)

— و —

unitary	واحدى (واحدى)
---------	---------------

مُسْتَرَدِّ المَرَاجِع

- Banach, S. (1922), Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Math.* **3**, 133-181
- Banach, S. (1929), Sur les fonctionnelles linéaires II. *Studia Math.* **1**, 223-239
- Banach, S. (1932), *Théorie des opérations linéaires*. New York: Chelsea
- Banach, S., et H. Steinhaus (1927), Sur le principe de la condensation de singularités. *Fundamenta Math.* **9**, 50-61
- Berberian, S. (1961), *Introduction to Hilbert Space*. New York: Oxford University Press
- Bernstein, S. N. (1912), Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkow* **13**, 1-2
- Bielicki, A. (1956), Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **4**, 261-268
- Birkhoff, G. (1967), *Lattice Theory*. 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **25**. Providence, R. I.: American Mathematical Society
- Birkhoff, G., and S. Mac Lane (1965), *A Survey of Modern Algebra*. 3rd. ed. New York: Macmillan
- Bohnenblust, H. F., and A. Sobczyk (1938), Extensions of functionals on complex linear spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 91-93
- Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. III à V. Paris: Hermann
- Bourbaki, N. (1970), *Éléments de mathématique*, *Algèbre*. Chap. 1 à 3. Paris: Hermann
- Cheney, E. W. (1966), *Introduction to Approximation Theory*. New York: McGraw-Hill
- Churchill, R. V. (1963), *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill
- Courant, R., and D. Hilbert (1953-62), *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. New York: Interscience/Wiley
- Cramér, H. (1955), *The Elements of Probability Theory and Some of its Applications*. New York: Wiley
- Day, M. M. (1973), *Normed Linear Spaces*. 3rd ed. New York: Springer

- Dieudonné, J. (1960), *Foundations of Modern Analysis*. New York: Academic Press
- Dixmier, J. (1953), Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens. *Acta Math. Szeged* **15**, 29–30
- Dunford, N., and J. T. Schwartz (1958–71), *Linear Operators*. 3 parts. New York: Interscience/Wiley
- Edwards, R. E. (1965), *Functional Analysis*. New York: Holt, Rinehart and Winston
- Enflo, P. (1973), A counterexample to the approximation property. *Acta Math.* **130**, 309–317
- Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953–55), *Higher Transcendental Functions*. 3 vols. New York: McGraw-Hill
- Fejér, L. (1910), Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. *Journal Reine Angew. Math.* **137**, 1–5
- Fréchet, M. (1906), Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 1–74
- Fredholm, I. (1903), Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.* **27**, 365–390
- Friedrichs, K. (1935), Beiträge zur Theorie der Spektralschar. *Math. Annalen* **110**, 54–62
- Gantmacher, F. R. (1960), *The Theory of Matrices*. 2 vols. New York: Chelsea
- Gelfand, I. (1941), Normierte Ringe. *Mat. Sbornik (Recueil mathématique)* N. S. **9**, (51), 3–24
- Gram, J. P. (1883), Ueber die Entwicklung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. *Journal Reine Angew. Math.* **94**, 41–73
- Haar, A. (1918), Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Annalen* **78**, 294–311
- Hahn, H. (1922), Über Folgen linearer Operationen. *Monatshefte Math. Phys.* **32**, 3–88
- Hahn, H. (1927), Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. *Journal Reine Angew. Math.* **157**, 214–229
- Halmos, P. R. (1958), *Finite-Dimensional Vector Spaces*. 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold
- Hamming, R. W. (1950), Error detecting and error correcting codes. *Bell System Tech. Journal* **29**, 147–160
- Hellinger, E., and O. Toeplitz (1910), Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. *Math. Annalen* **69**, 289–330

- Helmberg, G. (1969), *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*. New York: American Elsevier
- Hewitt, E., and K. Stromberg (1969), *Real and Abstract Analysis*. Berlin: Springer
- Hilbert, D. (1912), *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Repr. 1953. New York: Chelsea
- Hille, E. (1973), *Analytic Function Theory*. Vol. I. 2nd ed. New York: Chelsea
- Hille, E., and R. S. Phillips (1957), *Functional Analysis and Semi-Groups*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31. Rev. ed. Providence, R. I.: American Mathematical Society
- Hölder, O. (1889), Über einen Mittelwertsatz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 38-47
- Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover
- James, R. C. (1950), Bases and reflexivity of Banach spaces. *Annals of Math.* (2) 52, 518-527
- James, R. C. (1951), A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 37, 174-177
- Kelley, J. L. (1955), *General Topology*. New York: Van Nostrand
- Kelley, J. L., and I. Namioka (1963), *Linear Topological Spaces*. New York: Van Nostrand
- Kreyszig, E. (1970), *Introductory Mathematical Statistics*. New York: Wiley
- Kreyszig, E. (1972), *Advanced Engineering Mathematics*. 3rd ed. New York: Wiley
- Lebesgue, H. (1909), Sur les intégrales singulières, *Ann. de Toulouse* (3) 1, 25-117
- Lorch, E. R. (1939), On a calculus of operators in reflexive vector spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 45, 217-234
- Lorch, E. R. (1962), *Spectral Theory*. New York: Oxford University Press
- Löwig, H. (1934), Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniten Dimensionszahl. *Acta Sci. Math. Szeged* 7, 1-33
- McShane, E. J. (1944), *Integration*. Princeton, N. J.: Princeton University Press
- Merzbacher, E. (1970), *Quantum Mechanics*. 2nd ed. New York: Wiley
- Minkowski, H. (1896), *Geometrie der Zahlen*. Leipzig: Teubner

- Murray, F. J. (1937), On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p . *Trans. Amer. Math. Soc.* **41**, 138–152
- Naimark, M. A. (1972), *Normed Algebras*. 2nd ed. Groningen: Wolters-Noordhoff
- Neumann, J. von (1927), Mathematische Begründung der Quantenmechanik. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 1–57
- Neumann, J. von (1929–30), Allgemeine Eigenwerttheorie Hermite-scher Funktionaloperatoren. *Math. Annalen* **102**, 49–131
- Neumann, J. von (1929–30b), Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. *Math. Annalen* **102**, 370–427
- Neumann, J. von (1936), Über adjungierte Funktionaloperatoren. *Annals of Math.* (2) **33**, 294–310
- Poincaré, H. (1896), La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *Acta Math.* **20**, 59–142
- Pólya, G. (1933), Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Zeitschr.* **37**, 264–286
- Rellich, F. (1934), Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. *Math. Annalen* **110**, 342–356
- Riesz, F. (1909), Sur les opérations fonctionnelles linéaires. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **149**, 974–977
- Riesz, F. (1918), Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Math.* **41**, 71–98
- Riesz, F. (1934), Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. *Acta Sci. Math. Szeged* **7**, 34–38
- Riesz, F., and B. Sz.-Nagy (1955), *Functional Analysis*. New York: Ungar
- Rogosinski, W. (1959), *Fourier Series*. 2nd ed. New York: Chelsea
- Royden, H. L. (1968), *Real Analysis*. 2nd ed. New York: Macmillan
- Sard, A., and S. Weintraub (1971), *A Book of Splines*. New York: Wiley
- Schauder, J. (1930), Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. *Studia Math.* **2**, 1–6
- Schiff, L. I. (1968), *Quantum Mechanics*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill
- Schmidt, E. (1907), Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Math. Annalen* **63**, 433–476
- Schmidt, E. (1908), Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **25**, 53–77

- Schur, I. (1921), Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *Journal Reine Angew. Math.* **151**, 79–111
- Sobczyk, A. (1941), Projections in Minkowski and Banach spaces. *Duke Math. Journal* **8**, 78–106
- Stone, M. H. (1932), *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **15**. New York: American Mathematical Society
- Szegő, G. (1967), *Orthogonal Polynomials*. 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **23**. Providence, R. I.: American Mathematical Society
- Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis*. New York: Wiley
- Todd, J. (1962), *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill
- Wecken, F. J. (1935), Zur Theorie linearer Operatoren. *Math. Annalen* **110**, 722–725
- Weierstrass, K. (1885), Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 633–639, 789–805
- Wiener, N. (1922), Limit in terms of continuous transformation. *Bull. Soc. Math. France* (2) **50**, 119–134
- Wilks, S. S. (1962), *Mathematical Statistics*. New York: Wiley
- Wintner, A. (1929), Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. *Math. Zeitschr.* **30**, 228–282
- Yosida, K. (1971), *Functional Analysis*. 3rd ed. Berlin: Springer
- Zaanen, A. C. (1964), *Linear Analysis*. Amsterdam: North-Holland Publ.
- Zakon, E. (1973), *Mathematical Analysis*. Part II. Lecture Notes. Department of Mathematics, University of Windsor, Windsor, Ont.

الفهرس

مقدمة المترجم

الفصل الاول - الفضاءات المترية

١	١-١	الفضاء المترى
٣	٢-١	أمثلة أخرى على الفضاءات المترية
١١	٣-١	المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة ، الجوار
٢١	٤-١	التقارب ، متتالية كوشي ، التمام
٣٢	٥-١	أمثلة . براهين التمام
٤٢	٦-١	اتمام الفضاءات المترية
٥٣		

الفصل الثاني - الفضاءات المنظمة - فضاءات باناخ

٦٣	١-٢	الفضاء المتجهى
٦٤	٢-٢	الفضاء المنظم . فضاء باناخ
٧٥	٣-٢	خواص أخرى للفضاءات المنظمة
٨٦	٤-٢	الفضاءات المنظمة والفضاءات الجزئية منتهية البعد
٩٢	٥-٢	التراص والبعد المنتهى
٩٩	٦-٢	المؤثرات الخطية
١٠٦	٧-٢	المؤثرات الخطية المحدودة والمستمرة
١١٨	٨-٢	الداليات الخطية
١٣٤	٩-٢	المؤثرات والداليات الخطية على الفضاءات منتهية البعد
١٤٤	١٠-٢	الفضاءات المنظمة للمؤثرات . الفضاء الثنوي
١٥٢		

الفصل الثالث - فضاء الجداء الداخلى . فضاء هيلبرت

١٦٤	١-٣	فضاءات الجداء الداخلى . فضاءات هيلبرت
١٦٦	٢-٣	خواص أخرى لفضاءات الجداء الداخلى
١٧٦	٣-٣	المتتمات المعامدة والمجاميع المباشرة
١٨٤	٤-٣	المجموعات والمتتاليات المتعامدة المنظمة
١٩٥		

٢٠٧	٥-٣	المتسلسلات المرتبطة بالداليات والمجموعات المتعامدة المنظمة
٢١٧	٦-٣	المتتاليات والمجموعات المتعامدة المنظمة الكلية
٢٢٧	٧-٣	حدوديات لاكير وهرميت ولوجاندر
٢٤٢	٨-٣	تمثيل الداليات على فضاءات هلبيرت
٢٥١	٩-٣	مؤثر هلبيرت المرافق
٢٥٩	١٠-٣	المؤثرات المترافقة ذاتيا والواحدية والمنظمة

٢٦٩ الفصل الرابع - مبرهنات أساسية حول الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ

٢٧٠	١-٤	تمهيدية زورن
٢٧٥	٢-٤	مبرهنة هان - باناخ
	٣-٤	مبرهنة هان - باناخ في الفضاءات المتجهية العقدية والفضاءات المنظمة
٢٨٢	٤-٤	تطبيق على الداليات الخطية المحدودة على $C[a, b]$
٢٩٠	٥-٤	المؤثر المرافق
٢٩٧	٦-٤	الفضاءات الانعكاسية
٣٠٧	٧-٤	مبرهنة الفئة . مبرهنة المحدودية المنتظمة
٣١٧	٨-٤	التقارب القوي والتقارب الضعيف
٣٣٠	٩-٤	تقارب متتاليات المؤثرات والداليات
٣٣٨	١٠-٤	تطبيق على مجموعة المتتاليات
٣٤٦	١١-٤	المكاملة العددية والتقارب الضعيف*
٣٥٤	١٢-٤	مبرهنة التطبيق المفتوح
٣٦٥	١٣-٤	المؤثرات الخطية المفلقة . مبرهنة البيان المفلق
٣٧٤		

٣٨٢ الفصل الخامس - مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

٣٨٣	١-٥	مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ
٣٩٢	٢-٥	تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات الخطية
٤٠١	٣-٥	تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التفاضلية
٤٠٧	٤-٥	تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التكاملية

٤١٧ ثبت المصطلحات

٤٢٤ مستردّ الراجع

